1. ΤΙΤΛΟΣ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Επίλυση προβλημάτων μέγιστης και ελάχιστης τιμής με χρήση δυναμικών γεωμετρικών αντικειμένων.

2. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Συγγραφέας:

Δημήτριος Καλυκάκης

Γνωστική περιοχή μαθηματικών:

Άλγεβρα Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου.

Θέμα:

Το προτεινόμενο θέμα αφορά την διερεύνηση και επίλυση δύο προβλημάτων μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Συγκεκριμένα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha$ να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο ίση με 8cm, να βρεθεί εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Τεχνολογικά εργαλεία:

Το σενάριο προτείνεται να υλοποιηθεί με το λογισμικό Geogebra.

3. ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

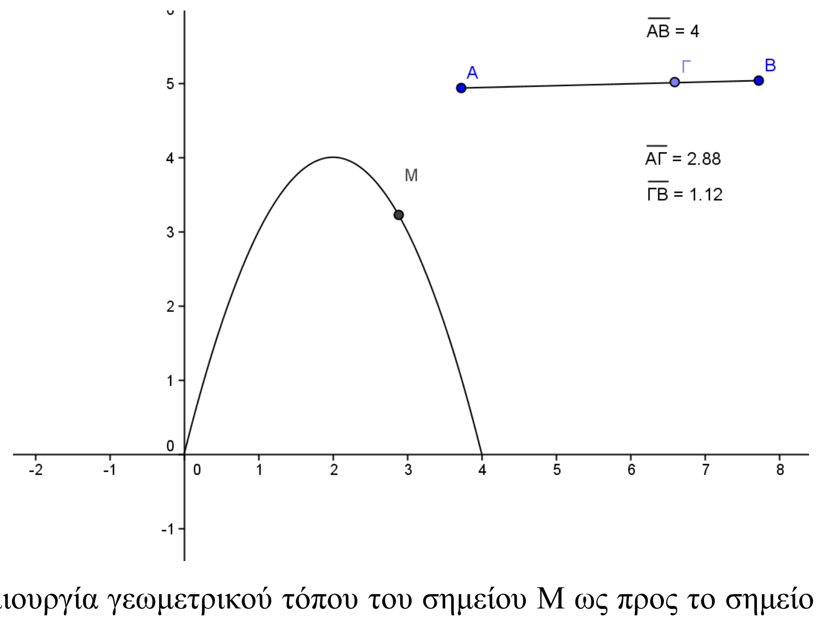
Βασική ιδέα:

Η λύση ορισμένων προβλημάτων μέγιστης και ελάχιστης τιμής ανάγεται στη μελέτη της πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού, ουσιαστικά δηλαδή στη θεωρία του τριωνύμου. Τόσο η λύση όσο και η μεθοδολογία για να καταλήξει κάποιος στη λύση αυτή, είναι δυνατόν να οπτικοποιηθεί αν η διδασκαλία υποστηριχθεί από ένα διερευνητικό λογισμικό το οποίο έχει χαρακτηριστικά CAS.

Προστιθέμενη αξία:

Στη συνηθισμένη διδασκαλία, τα δύο αυτά προβλήματα που διαπραγματευόμαστε λύνονται με καθαρά αλγεβρικά μέσα (π.χ. πρόσημο τριωνύμου) ή χρησιμοποιώντας το πολύ κάποια στατική εικόνα (π.χ. τη γραφική παράσταση μιας παραβολής). Η επιλογή όμως της κατάλληλης αλγεβρικής μεθόδου δεν είναι κάτι το προφανές. Κυρίως για το λόγο ότι τα προβλήματα αυτά είναι ανοικτού τύπου και άρα δεν παρέχουν στον υποψήφιο λύτη την απάντηση, ούτε υποδεικνύουν τη μέθοδο λύσης. Η προσέγγιση που επιχειρείται στο σενάριο αυτό, με την αξιοποίηση του λογισμικού Geogebra, έχει ιδιαίτερη διδακτική αξία διότι επιτρέπει όχι μόνο την οπτικοποιήση των προβλημάτων, αλλά και τον πειραματισμό καθώς και τη δημιουργία εικασιών σχετικά με τις πιθανές λύσεις. Ειδικά στο πρόβλημα 2, υποδεικνύει και τη μέθοδο λύσης.

Η επίλυση των δύο προβλημάτων υλοποιείται με χρήση δυναμικών γεωμετρικών αντικειμένων. Στο πρώτο πρόβλημα τα γεωμετρικά αντικείμενα είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, ενώ στο δε δεύτερο πρόβλημα είναι σημεία. Συγκεκριμένα, μέσα από τη δημιουργία του ίχνους ενός κατάλληλου σημείου ή από τη δημιουργία του γεωμετρικού του τόπου (Εικόνα 1) αναδεικνύεται μια συγκεκριμένη παραβολή και κατ' αυτόν τον τρόπο υποδεικνύεται η αναγωγή του προβλήματος στη μελέτη μιας συγκριμένης πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού, αξιοποιώντας με ένα πολύ δυναμικό τρόπο τη δυνατότητα των πολλαπλών αναπαραστάσεων του λογισμικού Geogebra.



Εικόνα 1: Δημιουργία γεωμετρικού τόπου του σημείου Μ ως προς το σημείο Γ, κατά τη διερεύνηση του προβλήματος 2

Οι μαθητές θα διαπραγματευτούν και θα διερευνήσουν μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις τα προβλήματα, συνεργαζόμενοι μεταξύ τους και με τον διδάσκοντα ώστε η αίθουσα να μετατραπεί σε ένα εργαστήριο μαθηματικών δραστηριοτήτων.

4. Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 3-4 διδακτικές ώρες

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ ολοκλήρου σε εργαστήριο υπολογιστών με τουλάχιστον 10 τερματικά ώστε οι μαθητές να συνεργαστούν σε ομάδες των τριών, στους υπολογιστές και επί τη βάση κατάλληλων φύλλων εργασίας. Η επιλογή από τον διδάσκοντα να υλοποιήσει το σενάριο στην αίθουσα διδασκαλίας με τη χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε μεγάλο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

Τη θεωρία του τριωνύμου.

Την έννοια της μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνάρτησης.

Τη μελέτη των συναρτήσων $f(x) = \alpha x + \beta$ και $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τις απαιτούμενες λειτουργικότητες και τις βασικές λειτουργίες του προγράμματος Geogebra. Συγκεκριμένα:

Τη δημιουργία δρομέα.

Τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων.

Τη δημιουργία σημείου όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του.

Τη δημιουργία ίχνους σημείου.

Τη δημιουργία γεωμετρικού τόπου σημείου.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:

Οι μαθητές κρίνεται σκόπιμο να διαθέτουν: α) τετράδιο, ώστε να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους, β) βιβλίο, για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες, γ) φύλλα εργασίας, τα οποία δίδονται από τον καθηγητή και έχουν ως στόχο να καθοδηγούν τους μαθητές στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων και δ) οδηγίες χρήσης του χρησιμοποιούμενου λογισμικού που θα δοθούν από τον εκπαιδευτικό.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Ο διδάσκων στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να διευκολύνει την επιχειρηματολογία, να προκαλεί συζητήσεις στην ολομέλεια της τάξης και να ενθαρρύνει τους μαθητές να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες των τριών ατόμων στις θέσεις εργασίας καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας, το οποίο θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία ώστε οι μαθητές να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σε αυτά συνεργατικά. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το λογισμικό ως νοητικό εργαλείο. Διενεργούν με αυτό μικροπειραματισμούς, και οδηγούνται μέσω της παρατήρησης σε εικασίες, συμπεράσματα ή γενικεύσεις, τα οποία μπορούν και ελέγχουν άμεσα. Μεταβάλλονται δηλαδή από παθητικούς δέκτες γνώσεων σε μικρούς ερευνητές.

Στόχοι:

Από την παιδαγωγική πλευρά, οι μαθητές:

Θα μάθουν να πειραματίζονται με τις περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες (γραφική παράσταση συνάρτησης, μέγιστη ελάχιστη τιμή, παράμετρος, κ.λπ.) θέτοντας ερωτήματα και διατυπώνοντας εικασίες.

Θα μάθουν να οργανώνουν τα δεδομένα τους από την διερεύνηση ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων και την τελική επίλυση του προβλήματος.

Θα μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας τους, να συζητούν τις παρατηρήσεις τους, να διατυπώνουν συμπεράσματα, κανόνες ή εικασίες, να κατασκευάζουν σχέσεις, να συνδέουν μεγέθη και να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες.

Από τη διδακτική πλευρά, ο απώτερος στόχος είναι:

Η ανακάλυψη, διερεύνηση, κατανόηση και εφαρμογή βασικών πτυχών που αφορούν προβλήματα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Ο εντοπισμός των ορίων μεταξύ διερεύνησης και απόδειξης.
Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να εμβαθύνουν στην επίλυση προβλημάτων και παράλληλα να διερευνήσουν το πώς μπορούν να αξιοποιήσουν την εμπειρία αυτή για να κατασκευάσουν ή να λύσουν δικά τους προβλήματα.

5. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

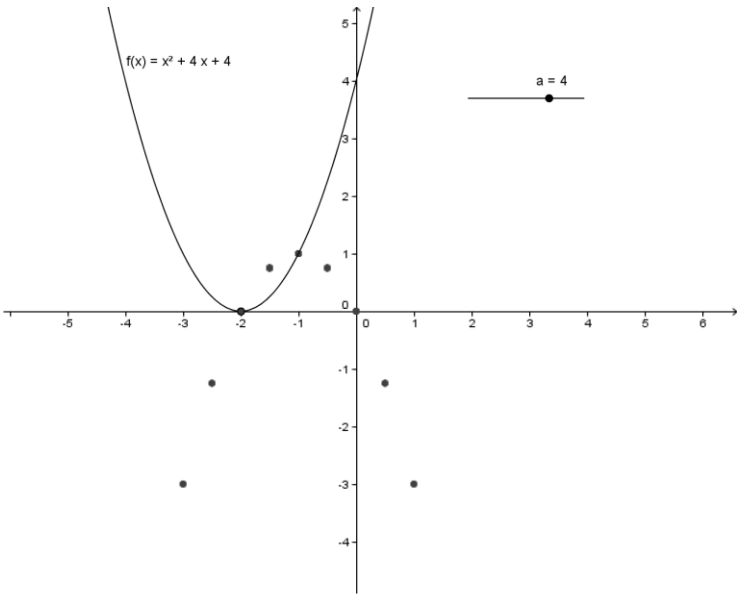
Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

Το σενάριο οργανώνεται πάνω σε δύο φύλλα εργασίας. Το πρώτο φύλλο εργασίας αφορά τη διερεύνηση και επίλυση του 1ου Προβλήματος, ενώ το δεύτερο φύλλο εργασίας αφορά τη διερεύνηση και επίλυση του 2ου Προβλήματος. Η ροή των δραστηριοτήτων έχει ως εξής:

<u>1η Φάση:</u> Διερεύνηση και επίλυση του 1ου Προβλήματος.

Η διαπραγμάτευση του πρώτου προβλήματος γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω ενδεικτικό φύλλο εργασίας 1. Το ζητούμενο είναι οι μαθητές να βρουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παραμέτρου α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha$ να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

Στις δραστηριότητες 1 – 5 οι μαθητές κατασκευάζουν δρομέα α και την παραβολή $y = x^2 + \alpha x + \alpha$. Καθώς μεταβάλλουν τις τιμές του δρομέα α παρατηρούν τη καμπύλη τους να μετακινείται χωρίς να παραμορφώνεται. Εστιάζοντας στις σχετικές θέσεις της παραβολής με τον άξονα $x'x$ (Εικόνα 2) διαπιστώνουν ότι όταν το α κυμαίνεται από 0 έως 4, τότε η παραβολή έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.



Εικόνα 2: Η παραβολή $y = x^2 + \alpha x + \alpha$, για $\alpha = 4$.

Το ερώτημα που τίθεται είναι εάν το διάστημα [0, 4] καλύπτει όλα τα α με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή η παραβολή να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. Η διερεύνησή του γίνεται με το λογισμικό, όμως η επιβεβαίωση θα πραγματοποιηθεί μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας που οργανώνεται στην 5η δραστηριότητα.

Εδώ, θα θέλαμε να δώσουμε έμφαση στον ανοιχτό τρόπο που διατυπώθηκε το πρόβλημα και που επιτρέπει την διερεύνηση που περιγράψαμε, σε αντιδιαστολή με τον κλειστό τρόπο που συναντάμε στα σχολικά βιβλία, όπου η διατύπωση θα ήταν περίπου ως εξής: «*Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha$ *έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα* $x'x$ *αν και μόνο αν* $0 \leq \alpha \leq 4$».

Φύλλο εργασίας 1

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παραμέτρου α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha$ να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Διερεύνηση του προβλήματος, διατύπωση εικασίας

Δραστηριότητα 1.
Ανοίξτε ένα νέο αρχείο του λογισμικού Geogebra.

Δραστηριότητα 2.

Δημιουργήστε έναν δρομέα για την παράμετρο α, με εύρος μεταβολής από -10 μέχρι 10 και αύξηση κατά 0.1. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha$, εισάγοντας τον τύπο στην γραμμή εισαγωγής.

Δραστηριότητα 3.
Μεταβάλετε το δρομέα, κατά συνεχή τρόπο, από -10 μέχρι 10 και προσδιορίστε τις τιμές του α για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f:

α) έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.
……………………………………………………………………………………......

β) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.
……………………………………………………………………………………......

γ) έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
……………………………………………………………………………………......

Υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει περισσότερα από δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$;
……………………………………………………………………………………….

Με βάση τις παρατηρήσεις που κάνατε, ποια πιστεύετε ότι είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου α, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$;

- μέγιστη τιμή του α = …………………
- ελάχιστη τιμή του α = …………………

Ειδικότερα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ όταν το α ανήκει στο σύνολο A = ………………….

Δραστηριότητα 4.
Μήπως, αν αυξήσουμε το εύρος μεταβολής της παραμέτρου α, μπορεί να αλλάξει το σύνολο A; Ποια είναι η γνώμη σας; Πειραματιστείτε!

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………….

ΜΕΡΟΣ Β΄: Απόδειξη της εικασίας και λύση του προβλήματος

Δραστηριότητα 5.
Διατυπώστε μια ικανή και αναγκαία (αλγεβρική) συνθήκη ώστε η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$:

………………………………………………………………………………………

Χρησιμοποιήστε την παραπάνω συνθήκη προκειμένου να αποδείξετε ότι: αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha$ έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, τότε το α ανήκει στο σύνολο Α που έχετε εικάσει προηγουμένως (δραστηριότητα 3).

Εργασία για το σπίτι

Άσκηση 1. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παραμέτρου α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + 2\alpha$ να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.
Άσκηση 2. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παραμέτρου α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \alpha x + 1$ να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. (Προσοχή: η περίπτωση $\alpha = 0$ δεν εμπίπτει στη θεωρία του τριωνύμου)
Άσκηση 3. Δίδεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + 2\alpha x + (a^2 - 1)$. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της παραμέτρου α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει ένα ή κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

2η Φάση: Εντοπισμός των ορίων μεταξύ διερεύνησης και απόδειξης.

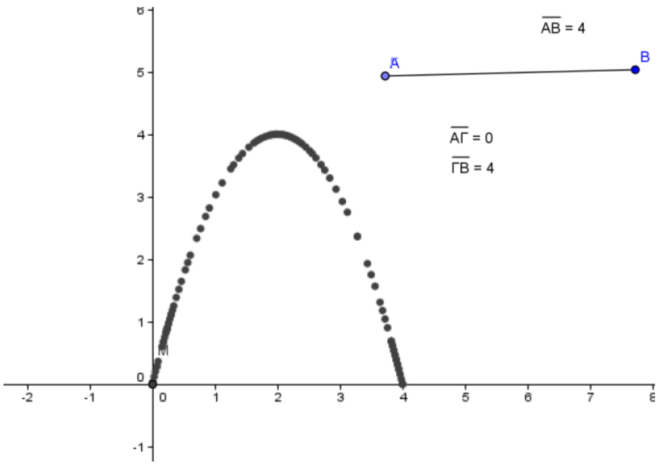
Κρίνεται σκόπιμο να αφιερωθεί χρόνος για να συζητηθούν (με χρήση του λογισμικού Geogebra) οι ασκήσεις 2, 3 που δόθηκαν ως εργασία για το σπίτι στο φύλλο εργασίας 1. Το ενδιαφέρον στην άσκηση 2 είναι ότι ο τύπος $f(x) = \alpha x^2 + \alpha x + 1$ δεν αναπαριστά παραβολή για όλες τις τιμές της παραμέτρου α, κάτι το οποίο γίνεται αμέσως αντιληπτό μέσα από τη δυνατότητα οπτικοποίησης της γραφικής παράστασης που παρέχει το λογισμικό. Η άσκηση 3, κατά την άποψή μας, θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τα όρια μεταξύ διερεύνησης και απόδειξης. Εδώ η διακρίνουσα είναι μόνιμα θετική και άρα δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. Από την άλλη μεριά, η οθόνη και ο δρομέας δεν μπορεί να δώσει εποπτεία για όλες τις τιμές του α. Κατά συνέπεια, η δυνατότητα που μας παρέχει εδώ η τεχνολογία δεν είναι αρκετή για να διατυπώσουμε με βεβαιότητα την εικασία της μη ύπαρξης, ούτε υποδεικνύει κάποια μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος. Αυτό άλλωστε φάνηκε και από την δραστηριότητα 4 στο φύλλο εργασίας 1. Ακριβώς αυτή η αβεβαιότητα, οδηγεί στην ανάγκη εξεύρεσης απόδειξης. Στη 3η φάση που ακολουθεί οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι υπάρχουν περιπτώσεις που είναι δυνατόν η διερεύνηση να υποδείξει μεθοδολογία για την ακριβή επίλυση ενός προβλήματος.

3η Φάση: Διερεύνηση και επίλυση του 2ου Προβλήματος.

Η διαπραγμάτευση του δεύτερου προβλήματος γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω ενδεικτικό φύλλο εργασίας 2. Ζητούμενο είναι να εντοπίσουν οι μαθητές τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει περίμετρο 8cm και μέγιστο εμβαδόν.

Αρχικά οι μαθητές σχεδιάζουν σε τετραγωνισμένο πλέγμα μερικά ορθογώνια με περίμετρο 8cm και παρατηρούν ότι δεν έχουν όλα το ίδιο εμβαδόν (δραστηριότητα 1). Θα μπορούσε να υπάρξει κάποιο με μέγιστο εμβαδόν; Τι διαστάσεις θα είχε αυτό; Για την απάντηση του ερωτήματος, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ένα ισοδύναμο ερώτημα ευθυγράμμων τμημάτων. Αν παραστήσουμε με διαδοχικά τμήματα το μήκος και το πλάτος των παραπάνω ορθογωνίων, τότε αυτά έχουν σταθερό άθροισμα ίσο με 4cm και το ζητούμενο είναι να μελετήσουν πότε το γινόμενο των τμημάτων γίνεται μέγιστο (ευθειοποίηση του προβλήματος).

Έτσι, στην 3η δραστηριότητα κατασκευάζουν τμήμα ΑΒ μήκους 4cm και παίρνουν σημείο Γ στο εσωτερικό του. Τότε τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ παίζουν τον ρόλο των διαστάσεων του ορθογωνίου και θέλουμε να δούμε πώς αλλάζει το γινόμενό τους. Για τον λόγο αυτό, οι μαθητές κατασκευάζουν σημείο Μ με τετμημένη το ΑΓ και τεταγμένη το γινόμενο $ΑΓ \cdot ΓΒ$. Καθώς σέρνουν το σημείο Γ επί του ΑΒ, το Μ αλλάζει θέση. Ενεργοποιώντας το ίχνος του (ή παίρνοντας τον γεωμετρικό του τόπο ως προς το Γ) παρατηρούν ότι το Μ διαγράφει μια παραβολή (δραστηριότητα 4), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3: Δημιουργία ίχνους σημείου, κατά τη διερεύνηση του προβλήματος 2

Οι μαθητές αναμένεται να εστιάσουν την προσοχή τους στην κορυφή της παραβολής που είναι το σημείο (2, 4) για να διατυπώσουν την εικασία ότι «*από όλα τα ορθογώνια περιμέτρου 8, το ορθογώνιο με διαστάσεις 2×2 (τετράγωνο) έχει μέγιστο εμβαδόν ίσο με 4*».

Καθώς η κορυφή της παραβολής και τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ είναι εμφανή, οι μαθητές μπορούν να λογαριάσουν και την εξίσωση της παραβολής.

Στην 5η δραστηριότητα δρομολογείται η μαθηματική απόδειξη του παραπάνω προβλήματος. Η πορεία είναι αντίστροφη, πρώτα εξάγεται ο τύπος ενός τριωνύμου και έπειτα αναζητείται το μέγιστό του, δηλαδή οι συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής - γραφικής παράστασης του τριωνύμου.

Οι ασκήσεις που δίνονται για το σπίτι, αφενός στοχεύουν στην μεγαλύτερη εξοικείωση με το πρόβλημα και αφετέρου στην γενίκευσή του.

Φύλλο εργασίας 2

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο ίση με 8cm, να βρεθεί εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Εξοικείωση με τις γεωμετρικές έννοιες του προβλήματος

Δραστηριότητα 1.

1) Στο παρακάτω πλέγμα, σχεδιάστε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με κορυφές σημεία του πλέγματος και περίμετρο 8cm – κάθε τετραγωνάκι έχει μήκος 1cm.

2) Υπολογίστε τα μήκη των πλευρών και το εμβαδόν τους.

………………………………………………………………………………………

3) Συγκρίνετε τα εμβαδά τους.

………………………………………………………………………………………

4) Πόσες πλευρές απαιτούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού;

……………………………………………………………………………………….

5) Τι σχέση έχουν οι πλευρές αυτές;

………………………………………………………………………………………

6) Πώς σχετίζεται το άθροισμά τους με την περίμετρο του ορθογωνίου;

………………………………………………………………………………………

ΜΕΡΟΣ Β΄: Διερεύνηση του προβλήματος, διατύπωση εικασίας

Δραστηριότητα 2.

Ανοίξτε ένα νέο αρχείο του λογισμικού Geogebra.

Δραστηριότητα 3.

«Ευθειοποίηση» του προβλήματος:

Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 4cm και δημιουργήστε ένα τυχαίο εσωτερικό του σημείο Γ.

Τα μήκη των τμημάτων …….. και ……... είναι πλέον οι δύο διαστάσεις του ορθογωνίου περιμέτρου 8cm, ενώ το γινόμενο …………………. εκφράζει το εμβαδόν.

Δραστηριότητα 4.

1) Μετρήστε τα μήκη ΑΓ και ΓΔ.
2) Δημιουργήστε τον αριθμό GINOMENO που να υπολογίζει το γινόμενο $A\Gamma \cdot \Gamma B$.
3) Καθώς σέρνετε το σημείο Γ επί του τμήματος ΑΒ, πώς μεταβάλλεται το γινόμενο $A\Gamma \cdot \Gamma B$; Κατασκευάστε το σημείο Μ με τετμημένη το μήκος του ΑΓ και τεταγμένη το GINOMENO, δηλαδή το $M(A\Gamma,\ A\Gamma \cdot \Gamma B)$. Χρησιμοποιήστε τη λειτουργία του «ίχνους σημείου» και του «γεωμετρικού τόπου» προκειμένου να απαντήσετε το ερώτημα.
4) Τι σχήμα (καμπύλη) προκύπτει; ……………………………………………..
5) Θα μπορούσατε να προσδιορίσετε την εξίσωση της καμπύλης αυτής; ……………………………………………………………………………………
6) Για ποια τιμή του ΑΓ το γινόμενο $A\Gamma \cdot \Gamma B$ (=εμβαδόν) γίνεται μέγιστο; ……………………..
7) Διατυπώστε την εικασία σας για τη λύση του προβλήματος:

«*Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο ίση με 8cm, εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν είναι το*……………………………………………………………»

ΜΕΡΟΣ Γ΄: Απόδειξη της εικασίας και λύση του προβλήματος

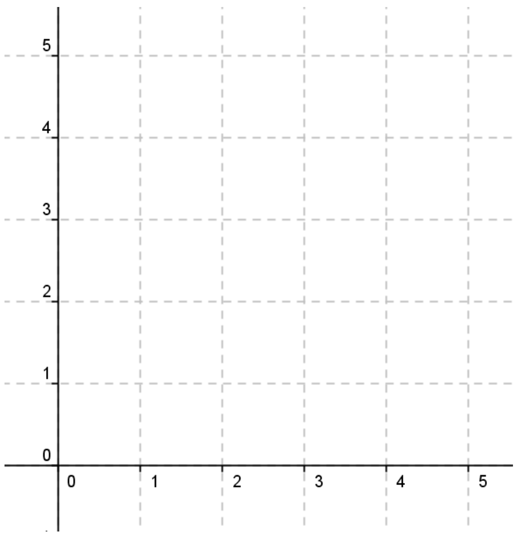
Δραστηριότητα 5.

Έστω x και y οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο ίση με 8cm.

1) Εκφράστε το y συναρτήσει του x.

2) Εκφράστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x. Συμβολίστε με $f(x)$ την έκφραση αυτή. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το ερώτημα 6 της δραστηριότητας 4.

3) Σχεδιάστε στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f και βρείτε την μέγιστη τιμή της. Για ποιο x επιτυγχάνεται η μέγιστη αυτή τιμή;



4) Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο ίση με 8cm, εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν είναι το ……………………………………………

Εργασία για το σπίτι

Άσκηση 1. Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο ίση με 10cm, να βρεθεί εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν.
Άσκηση 2. Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο α ($\alpha > 0$) να βρεθεί εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν.

6. Επεκταση

Το συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να αποτελέσει τη βάση πάνω στην οποία είναι δυνατό να οργανωθεί η διδασκαλία και άλλων προβλημάτων μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Επί παραδείγματι, μια ενδιαφέρουσα επέκταση του παρόντος σεναρίου θα μπορούσε να είναι η διερεύνηση και η επίλυση της δυικής έκδοσης του προβλήματος 2, δηλαδή: «*Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερό εμβαδόν, να βρεθεί εκείνο που έχει την ελάχιστη περίμετρο*».

7. Αξιολογηση μετα την εφαρμογη

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου:

Μετά την υλοποίηση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει την επίτευξη των στόχων του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι η κατασκευή κατάλληλων ερωτήσεων και ασκήσεων τις οποίες ο καθηγητής θα απευθύνει στο τέλος στους μαθητές για να ελέγξει τον βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί και θα παρέμβει διορθωτικά αν αυτό απαιτείται.

Ως προς τα εργαλεία:
Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του λογισμικού Geogebra και επισημαίνει τις ενδεχόμενες ιδιαιτερότητες.

Ως προς τη διαδικασία υλοποίησης:
Ο διδάσκων καλό είναι να κρατάει σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης των διαφόρων δραστηριοτήτων ώστε να είναι σε θέση στο μέλλον, ανάλογα με τον διαθέσιμο χρόνο ή το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, να προβαίνει σε αλλαγές στη ροή, στις δραστηριότητες ή ακόμα και στα ζητούμενα.

Ως προς την προσαρμογή και την επεκτασιμότητα:
Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά τη δομή του και σχεδιάζει, αν το κρίνει απαραίτητο, νέες δυνατότητες και επεκτάσεις.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η βιβλιογραφία είναι ενδεικτική και δεν έχει την έννοια της θεωρητικής τεκμηρίωσης αλλά κυρίως είναι αναφορά στα χρησιμοποιούμενα εγχειρίδια.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2010). Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου. Αθήνα : ΟΕΔΒ

ΕΑΙΤΥ. (2010α). Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης και Επιμόρφωσης. Τεύχος 1: Γενικό Μέρος, Β΄ έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ΕΑΙΤΥ

ΕΑΙΤΥ. (2010β). Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης και Επιμόρφωσης. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Β΄ έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ΕΑΙΤΥ

Ματσαγγούρας, Η. (1987). Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση. Αθήνα: Γρηγόρης