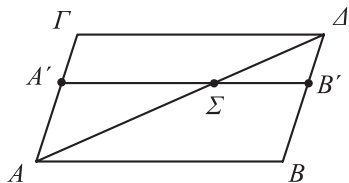


# 1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

## Εισαγωγή

Το διάνυσμα είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που αναπτύχθηκε μέσα από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής. Ο “κανόνας του παραλληλόγραμμου”, σύμφωνα με τον οποίο το μέτρο και η κατεύθυνση δύο δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα εκφράζονται από τη διαγώνιο του παραλληλόγραμμου που σχηματίζουν, ήταν γνωστός με διάφορες μορφές στους Αρχαίους Έλληνες επιστήμονες. Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, για παράδειγμα, στο έργο του “Μηχανικά” αποδεικνύει με χρήση αναλογιών την ακόλουθη γεωμετρική πρόταση:

Αν ένα σημείο  $\Sigma$  κινείται με ομαλή κίνηση κατά μήκος μιας ευθείας  $AB$ , ενώ συγχρόνως η  $AB$  κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της με το άκρο  $A$  να διαγράφει μια ευθεία  $A\Gamma$ , τότε η πραγματική τροχιά του  $\Sigma$  (η “συνισταμένη κίνηση”) θα είναι η διαγώνιος  $A\Delta$  του παραλληλόγραμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

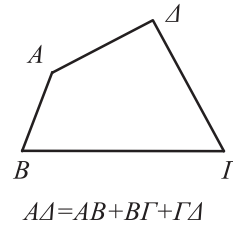


Αυτός ο “κανόνας” χρησιμοποιήθηκε πολλούς αιώνες για το γεωμετρικό προσδιορισμό της συνισταμένης, χωρίς όμως να θεωρείται ένα νέο είδος πρόσθεσης ευθυγράμμων τμημάτων, διαφορετικό από εκείνο που χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Για να γίνει αυτό, χρειάστηκε από τη μια μεριά η αποδοχή και συστηματική χρήση των αρνητικών αριθμών στα Μαθηματικά και από την άλλη η μελέτη φυσικών ποσοτήτων όπως η ταχύτητα, η δύναμη, η ορμή και η επιτάχυνση, που χαρακτηρίζονται τόσο από το μέτρο όσο και από τη διεύθυνσή τους. Αυτές οι εξελίξεις έφεραν στο προσκήνιο τις έννοιες της προσανατολισμένης κίνησης και του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος, τις πρώτες ιδέες των οποίων συναντάμε σε έργα επιστημόνων του 17ου αιώνα όπως οι J. Wallis, I. Newton και G.W. Leibniz.

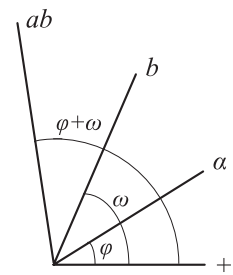
Η ανάπτυξη ενός συστηματικού λογισμού με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα άρχισε στα τέλη του 18ου αιώνα, για να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία στους αρνητικούς αριθμούς, αλλά και για να βρεθεί ένας τρόπος αναλυτικής έκφρασης του μήκους και της διεύθυνσης των ευθύγραμμων τμημάτων. Πρωτοποριακό υπήρξε προς αυτή την κατεύθυνση το έργο των C. Wessel (1799) και R.

Argand (1806). Ξεκινώντας από την απλή περίπτωση των προσανατολισμένων τμημάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, προχώρησαν στον ορισμό των πράξεων με τυχαία τμήματα του επιπέδου. Συγκεκριμένα, οι ορισμοί του Wessel ήταν οι εξής:

*Το άθροισμα διαδοχικών προσανατολισμένων τμημάτων είναι το τμήμα που ενώνει την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου.*



*Το γινόμενο δύο προσανατολισμένων τμημάτων που σχηματίζουν γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$  αντιστοίχως με ένα μοναδιαίο τμήμα, είναι το τμήμα που έχει μήκος το γινόμενο των μηκών των δύο τμημάτων και σχηματίζει γωνία  $\varphi + \omega$  με το μοναδιαίο τμήμα.*



Στις εργασίες των Wessel και Argand (και ορισμένες άλλες που δημοσιεύτηκαν εκείνη την εποχή) υπάρχουν οι βασικές ιδέες που συγκροτούν σήμερα το Διανυσματικό Λογισμό του επιπέδου. Η ουσιαστική ανάπτυξη του κλάδου αρχίζει όμως μερικές δεκαετίες αργότερα, όταν επιχειρείται η γενίκευση αυτών των ιδεών στον τρισδιάστατο χώρο και η θεμελίωση μιας γενικής μαθηματικής θεωρίας. Καθοριστικό υπήρξε προς αυτήν την κατεύθυνση του έργο του W. Hamilton (1843) και του H. Grassmann (1844). Ο W. Hamilton χρησιμοποίησε τον όρο διάνυσμα (vector). Ο όρος vector προέρχεται κατά μία εκδοχή από το λατινικό ρήμα “vehere” που σημαίνει μεταφέρω. Ο H. Grassmann χρησιμοποίησε τους όρους **εσωτερικό** και **εξωτερικό γινόμενο**.

Η παραπέρα εξέλιξη του Διανυσματικού Λογισμού επηρεάστηκε αποφασιστικά από τις εξελίξεις στη Φυσική κατά το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα. Η χρήση της θεωρίας του Hamilton από τον ιδρυτή της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας J.C. Maxwell (1873) οδήγησε σε ορισμένες τροποποιήσεις, με βάση τις οποίες οι φυσικοί J.W. Gibbs και O. Heaviside δημιούργησαν στις αρχές της δεκαετίας του 1880 τη σύγχρονη θεωρία του Διανυσματικού Λογισμού (στοιχεία της οποίας παρουσιάζονται σ' αυτό το κεφάλαιο). Τέλος το 1888, ο G. Peano, με βάση τη θεωρία του Grassmann θεμελίωσε αξιωματικά την έννοια του διανυσματικού χώρου.