3 ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Εισαγωγή

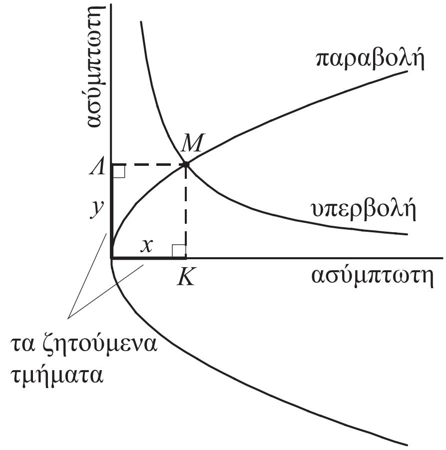
Η μελέτη της έλλειψης, της παραβολής και της υπερβολής από τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς φαίνεται ότι είχε αφετηρία τη σχέση αυτών των καμπύλων με ορισμένα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, όπως, για παράδειγμα, το περίφημο πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου:

"Δοθέντος ενός κύβου, να κατασκευαστεί ένας άλλος με διπλάσιο όγκο".

Με αλγεβρικό συμβολισμό αυτό σημαίνει ότι αν α είναι η πλευρά του αρχικού κύβου, να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα x, που θα είναι η πλευρά του κύβου με όγκο $2\alpha^3$, δηλαδή $x^3 = 2\alpha^3$. Ο Πρόκλος (450 περίπου μ.Χ.) αναφέρει ότι ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 περίπου π.Χ.) ήταν ο πρώτος που ανήγαγε το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου στην παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων ανάμεσα στο α και το 2α, δηλαδή στην κατασκευή δύο τμημάτων x και y, τέτοιων, ώστε $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$ (1) (από τις αναλογίες αυτές προκύπτει εύκολα ότι $x^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή το x θα είναι η πλευρά του ζητούμενου κύβου).

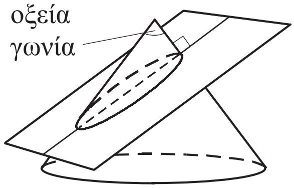
Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το πρόβλημα παρεμβολής μιας μέσης αναλόγου ανάμεσα σε δύο γνωστά τμήματα α, β (δηλαδή η κατασκευή τμήματος x τέτοιου, ώστε $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\beta}$) λύνεται εύκολα με κανόνα και διαβήτη, δηλαδή με τη βοήθεια ευθείας και κύκλου. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για την παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων η οποία απαιτεί τη χρησιμοποίηση διαφορετικών γεωμετρικών καμπύλων. Επειδή από τις αναλογίες (1) προκύπτει $x^2 = \alpha y$ (2), $y^2 = 2\alpha x$ (3) και $xy = 2\alpha^2$ ή $y = \frac{2\alpha^2}{x}$ (4), συμπεραίνουμε ότι τα μήκη των τμημάτων x και y θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής δύο από τις τρεις καμπύλες (2), (3) και (4), που είναι αντιστοίχως δύο παραβολές και μία υπερβολή.

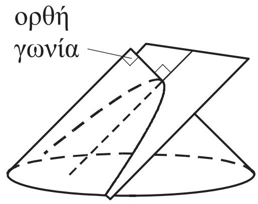
Η φράση "Μεναιχμείους κωνοτομείν τριάδας", που αναφέρεται σε ένα επίγραμμα του Ερατοσθένη του Κυρηναίου (250 περίπου π.Χ.) σχετικό με το διπλασιασμό του κύβου, έχει οδηγήσει στην υπόθεση ότι οι τρεις αυτές καμπύλες ανακαλύφθηκαν από τον Μέναιχμο, εταίρο στην Ακαδημία του Πλάτωνα, γύρω στο 350 π.Χ. Στη μία από τις δύο λύσεις του Μέναιχμου, που αναφέρει ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης (550 περίπου μ.Χ.), οι καμπύλες κατασκευάζονται σύμφωνα με τα γεωμετρικά ισοδύναμα των (3) και (4). Για παράδειγμα, το M, ως σημείο της παραβολής, προσδιορίζεται, έτσι ώστε το τετράγωνο πλευράς MK να είναι ισοδύναμο προς ένα ορθογώνιο με πλευρές 2α και $M\Lambda$ (δηλαδή $y^2 = 2\alpha x$), ενώ ως σημείο της υπερβολής, έτσι ώστε το ορθογώνιο με πλευρές $M\Lambda$ και MK να είναι ισοδύναμο προς ένα ορθογώνιο με πλευρές 2α και α (δηλαδή $xy = 2\alpha^2$). Τέλος, τα ζητούμενα τμήματα x, y προσδιορίζονται φέρνοντας τις κάθετες από το σημείο τομής των δύο καμπύλων πάνω στις ασύμπτωτες της υπερβολής (η μία από τις οποίες είναι ταυτόχρονα και άξονας συμμετρίας της παραβολής).

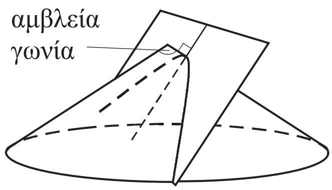


Γύρω στο 300 π.Χ., η υπερβολή, η παραβολή και η έλλειψη είχαν γίνει αντικείμενο συστηματικής μελέτης, ως οι τομές που δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός κώνου από ένα επίπεδο κάθετο σε μια γενέτειρά του.

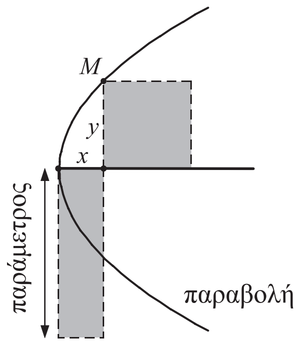
Ανάλογα με τη γωνία της κορυφής του κώνου οι καμπύλες αυτές ορίζονταν ως “οξυγωνίου κώνου τομή” (έλλειψη), “ορθογωνίου κώνου τομή” (παραβολή) και “αμβλυγωνίου κώνου τομή” (υπερβολή). Οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.) στα έργα του “Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής” και “Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων”. Αποκορύφωμα της θεωρητικής μελέτης των τριών κωνικών τομών κατά την αρχαιότητα, υπήρξε το περίφημο έργο “Κωνικά” του Απολλώνιου του Περγαίου (250 περίπου π.Χ.), ο οποίος στηρίχτηκε σε προηγούμενα έργα του Αρισταίου και του Ευκλείδη, τα οποία όμως δε διασώθηκαν. Τα “Κωνικά” ήταν χωρισμένα σε 8 βιβλία, που περιείχαν μια άψογη γεωμετρική θεωρία των κωνικών τομών και ένα μεγάλο πλήθος νέων αποτελεσμάτων. Στα 7 πρώτα βιβλία που έχουν διασωθεί υπάρχουν 387 θεωρήματα ενώ στο 8ο, όπως



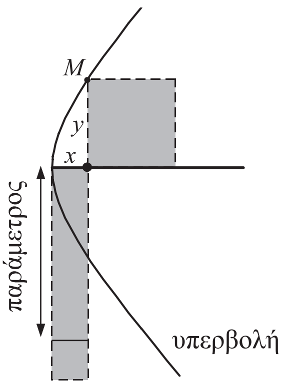


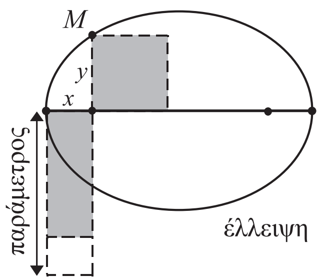


συνάγεται από μαρτυρία του Πάππου, υπήρχαν άλλα 100. Μια βασική καινοτομία του Απολλώνιου υπήρξε ο ορισμός των τριών καμπύλων διαμέσου τριών διαφορετικών τομών ενός κώνου, καθώς και η εισαγωγή των όρων “παραβολή”, “έλλειψη” και “υπερβολή”.



Τα ονόματα αυτά έχουν άμεση σχέση με το νέο τρόπο ορισμού των κωνικών τομών από τον Απολλώνιο, σύμφωνα με τον οποίο, σε κάθε τομή του κώνου από το επίπεδο αντιστοιχεί ένα σταθερό μήκος (παράμετρος), το οποίο εξαρτάται από το είδος του κώνου και από τη θέση του επιπέδου. Ο Απολλώνιος έδειξε ότι για κάθε καμπύλη τα δύο γραμμοσκιασμένα εμβαδά σε καθένα από τα διπλανά σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Το ένα από αυτά είναι το τετράγωνο με πλευρά την κάθετη y από σημείο της καμπύλης προς τον άξονα συμμετρίας της το άλλο είναι ένα ορθογώνιο με μια πλευρά την απόσταση x του ίχνους αυτής της κάθετης από την κορυφή της καμπύλης. Η σχέση της άλλης πλευράς του ορθογωνίου προς τη σταθερή παράμετρο της τομής είναι αυτή που καθορίζει τη μορφή και το όνομα της καμπύλης. Αν η άλλη πλευρά ισούται (“παραβάλλεται”) προς την παράμετρο, τότε η καμπύλη είναι παραβολή. Αν η άλλη πλευρά είναι μικρότερη (“ελλείπει”) από την παράμετρο, η καμπύλη είναι έλλειψη, ενώ αν είναι μεγαλύτερη (“υπερβάλλει”), η καμπύλη είναι υπερβολή.





3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση Κύκλου

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο