

4. Να αποδείξετε ότι οι ακέραιοι της μορφής $v^4 + 4$, όπου v θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1, και οι ακέραιοι της μορφής $8^v + 1$, όπου v θετικός ακέραιος, είναι σύνθετοι αριθμοί.
5. Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$ με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{43}{34}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι σύνθετος.
6. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος p για τον οποίον οι αριθμοί $p, p+2$ και $p+4$ είναι και οι τρεις πρώτοι είναι ο $p = 3$.
7. Να λύσετε στο \mathbf{N} τις εξισώσεις
 (i) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ (ii) $x^2 + x + p = 112$, όπου p θετικός πρώτος.
8. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$. Αν $\beta^2 \mid \alpha^2$, να αποδείξετε ότι $\beta \mid \alpha$.

4.6 Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Εισαγωγή

Ένα από τα αρχαιότερα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών είναι η αναζήτηση των ακέραιων αριθμών που ικανοποιούν κάποιες δεδομένες σχέσεις. Με σύγχρονη ορολογία θα διατυπώσουμε το ίδιο πρόβλημα ως επίλυση, στο \mathbf{Z} , πολυωνυμικών εξισώσεων με έναν ή περισσότερους αγνώστους και με ακέραιους συντελεστές. Ο κλάδος που ασχολείται με αυτό το ζήτημα ονομάζεται Διοφαντική Ανάλυση προς τιμήν του Διόφαντου (250 περίπου μ.Χ.), που ασχολήθηκε συστηματικά με τέτοιου είδους προβλήματα στο έργο του “Αριθμητικά”.

Η αναζήτηση Πυθαγόρειων τριάδων (δηλαδή ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x^2 + y^2 = z^2$) συγκαταλέγεται ανάμεσα στα κλασικά προβλήματα της Διοφαντικής Ανάλυσης. Υπάρχουν ενδείξεις ότι η λύση αυτού του προβλήματος (που δίνεται σήμερα από τους τύπους $x = \mu^2 - \nu^2$, $y = 2\mu\nu$, $z = \mu^2 + \nu^2$) ήταν γνωστή στους Βαβυλώνιους, αλλά η πλήρης θεωρητική διαπραγμάτευση του ζητήματος έγινε από τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Ο Ευκλείδης διατυπώνει το πρόβλημα στη μορφή

“Ευρείν δύο τετραγώνους αριθμούς, ώστε και το συγκείμενον εξ αυτών είναι τετράγωνον”

και δίνει τη γενική λύση στη γεωμετρική γλώσσα των “Στοιχείων” (Βιβλίο X, Λήμμα 1, Πρότ. 28).

Ο Διόφαντος διαπραγματεύεται το ίδιο πρόβλημα στα “Αριθμητικά”

“Τον επιταχθέντα τετράγωνον διελείν εις δύο τετραγώνους”,

αλλά η λύση που δίνει βρίσκεται πιο κοντά στο σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα ήταν η αφορμή να ισχυριστεί ο P. Fermat (1601-1665) ότι η διοφαντική εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ είναι αδύνατη, όταν ο n είναι φυσικός μεγαλύτερος του 2, σημειώνοντας μάλιστα πάνω στο βιβλίο του Διόφαντου που μελετούσε: “έχω μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αυτής της πρότασης, αλλά το περιθώριο είναι πολύ στενό για να τη χωρέσει”. Ο ισχυρισμός αυτός του Fermat αποδείχτηκε αληθής το 1994 από τον A. Wiles, αφού υπήρξε για 350 χρόνια ένα από τα διασημότερα άλματα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.

Η επίλυση διοφαντικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του 2ου αποτελεί ένα ανοικτό μαθηματικό πρόβλημα, καθώς δεν έχουν βρεθεί γενικοί τύποι επίλυσης. Ο D. Hilbert διατύπωσε το 1900, ως ένα ζήτημα βασικής μαθηματικής έρευνας στη διάρκεια του 20ού αιώνα, την αναζήτηση ενός αλγόριθμου επίλυσης μιας διοφαντικής εξίσωσης με οποιοδήποτε αριθμό αγνώστων. Το 1970, ο Y. Matyasevich, σε ηλικία 22 χρόνων, απέδειξε ότι ένας τέτοιος αλγόριθμος δεν υπάρχει.

Επίλυση Γραμμικής Διοφαντικής Εξίσωσης

Έστω η εξίσωση $ax + by = \gamma$, όπου a, b, γ ακέραιοι με $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Αν αναζητούμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης αυτής, δηλαδή ζεύγη ακεραίων (x, y) που την επαληθεύουν, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε μια **γραμμική διοφαντική εξίσωση**.

Μερικές διοφαντικές εξισώσεις μπορεί να έχουν πολλές λύσεις, όπως, για παράδειγμα, η $3x + 6y = 18$, για την οποία μπορούμε να διαπιστώσουμε με αντικατάσταση ότι τα ζεύγη $(4, 1)$, $(-6, 6)$, $(10, -2)$ είναι ακέραιες λύσεις της. Υπάρχουν όμως διοφαντικές εξισώσεις που δεν έχουν καμιά λύση. Για παράδειγμα, η διοφαντική εξίσωση $2x + 6y = 13$ δεν έχει καμιά λύση, αφού για όλες τις ακέραιες τιμές των x, y το πρώτο μέλος της είναι άρτιος αριθμός, ενώ το δεύτερο μέλος της είναι περιττός αριθμός. Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει απάντηση στο ερώτημα πότε μια διοφαντική εξίσωση έχει λύση, και αν έχει, πόσες είναι αυτές οι λύσεις.