

Το Κόσκινο του Ερατοσθένη

Μια έξυπνη τεχνική για τον προσδιορισμό των πρώτων που δεν υπερβαίνουν ένα θετικό ακέραιο $n > 1$ στηρίζεται στο προηγούμενο θεώρημα και την οφείλουμε στον Αρχαίο Έλληνα μαθηματικό Ερατοσθένη (περίπου 250 π.Χ.).

Η τεχνική λέγεται **κόσκινο του Ερατοσθένη** και είναι η εξής:

Γράφουμε σε έναν πίνακα με αύξουσα σειρά τους ακεραίους από 2 μέχρι n . Αφήνουμε τον πρώτο 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Ο επόμενος πρώτος στον πίνακα μετά τον 2 είναι ο 3. Αφήνουμε τον 3 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του κτλ. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τον πρώτο p με $p \leq \sqrt{n}$. Οι ακέραιοι που απομένουν, δηλαδή όσοι δεν “έπεσαν” από το “κόσκινο”, είναι οι πρώτοι μεταξύ 2 και n . Όλοι οι άλλοι “έπεσαν”, διότι, ως σύνθετοι, είχαν διαιρέτη κάποιον πρώτο μικρότερο ή ίσο της \sqrt{n} και ως πολλαπλάσια του διαγράφηκαν.

Στον παρακάτω πίνακα έχουν προσδιοριστεί οι πρώτοι μεταξύ 1 και 100. Έχουν διαγραφεί τα πολλαπλάσια των πρώτων 2, 3, 5 και 7, αφού ο επόμενος πρώτος είναι ο αριθμός 11 και ισχύει $11 > \sqrt{100}$.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Στο σημείο αυτό πιθανόν να αναρωτηθεί κάποιος: Τελειώνουν κάπου οι πρώτοι; Υπάρχει δηλαδή μέγιστος πρώτος ή οι πρώτοι συνεχίζονται “επ’ άπειρον”;

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 (του Ευκλείδη)

Υπάρχουν άπειροι θετικοί πρώτοι αριθμοί.