4.5 ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Εισαγωγή

Δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς ήταν γνωστά ήδη από την αρχαιότητα. Το γεγονός ότι κάθε ακέραιος αναλύεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων εμφανίζεται στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη στην εξής μορφή (βιβλίο IX, πρόταση 14):

"Εάν ελάχιστος αριθμός υπό πρώτων αριθμών μετρήται, υπ' ουδενός άλλου πρώτου αριθμού μετρηθήσεται παρέξ των εξ αρχής μετρούντων".

Στα "Στοιχεία" επίσης, το γεγονός ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί εμφανίζεται ως εξής (βιβλίο IX, πρόταση 20):

"Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών".

Το αποτέλεσμα αυτό και η απόδειξή του από τον Ευκλείδη θεωρούνται ένα από τα αριστουργήματα της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης. Ο G. Hardy (1877- 1947) έγραψε ότι "… είναι τόσο σύγχρονο και σημαντικό όπως και όταν ανεκαλύφθη-εδώ και 2000 χρόνια παρέμεινε ανέπαφο".

Ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που έχει εντοπιστεί μέχρι σήμερα είναι ο $2^{2.976.221} - 1$, ένας "γίγαντας" με 895.932 ψηφία. Πρόκειται για τον 36ο από τους πρώτους αριθμούς της μορφής $2^{\nu} - 1$ που γνωρίζουμε και ο οποίος οδήγησε στην ανακάλυψη του 36ου τέλειου αριθμού (βλπ. προηγούμενο ιστορικό σημείωμα). Οι τεράστιοι αυτοί αριθμοί εντοπίστηκαν με τη βοήθεια κριτηρίων αναγνώρισης πρώτων, που απαιτούν πολύωρη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Άλλοι πρώτοι αριθμοί με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι αυτοί της μορφής $p = 2^{\nu} + 1$, όπου $\nu = 2^{\kappa}$, από τους οποίους όμως γνωρίζουμε μόνο 5, αυτούς που προκύπτουν για $\kappa = 0, 1, 2, 3, 4$ και είναι αντίστοιχα οι 3, 5, 17, 257, 65537 (όσοι από τους υπόλοιπους έχουν ελεγχθεί αποδείχτηκαν σύνθετοι). Ο C.F. Gauss σε πολύ νεαρή ηλικία έδειξε ότι ένα κανονικό πολύγωνο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη, μόνο αν το πλήθος των πλευρών του είναι πρώτος αριθμός αυτής της μορφής ή γινόμενο πρώτων αυτής της μορφής πολλαπλασιασμένο επί μια δύναμη του 2 ή απλώς μια δύναμη του 2.

Το σημαντικότερο όμως ζήτημα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς αφορά την κατανομή τους μέσα στην ακολουθία των φυσικών. Η κατανομή αυτή είναι πολύ ακανόνιστη, γιατί από τη μια μεριά υπάρχουν εκατομμύρια ζεύγη των λεγόμενων δίδυμων πρώτων, όπως , για παράδειγμα, οι (29, 31), (1451, 1453), (299477, 299479), ενώ από την άλλη υπάρχουν τεράστια κενά χωρίς κανέναν πρώτο. Μια σχετική τάξη στο χάος βάζει το "Θεώρημα των πρώτων αριθμών", σύμφωνα με το οποίο το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι από τον φυσικό ν δίνεται κατά προσέγγιση (καθώς το ν γίνεται πολύ μεγάλο) από τον τύπο $\nu / \ln \nu$. Αυτό το διαπίστωσαν εμπειρικά, μελετώντας πίνακες πρώτων αριθμών, οι A.M. Legendre και C.F. Gauss στα τέλη του 18$^{\text{ου}}$ αιώνα, ενώ η πρώτη αυστηρή απόδειξη δόθηκε 100 χρόνια αργότερα.

Έννοια Πρώτου Αριθμού

Παρατηρήσαμε προηγουμένως ότι κάθε ακέραιος $\alpha \neq 0, \pm 1$ διαιρείται με τους ακέραιους ± 1 και $\pm\alpha$. Αν αυτοί είναι και οι μόνοι διαιρέτες του α, τότε αυτός λέγεται πρώτος αριθμός. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε ακέραιος $p \neq 0, \pm 1$ λέγεται **πρώτος αριθμός** ή απλώς **πρώτος**, αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι οι 1 και $|p|$.

Για παράδειγμα, οι ακέραιοι 2 και -7 είναι πρώτοι, ενώ ο $8 = 2 \cdot 4$ και ο $-39 = 3 \cdot (-13)$ δεν είναι πρώτοι.

Ένας ακέραιος $\alpha \neq \pm 1$ που δεν είναι πρώτος λέγεται **σύνθετος**. Ένας σύνθετος αριθμός α μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $\beta \cdot \gamma$ με $\beta \neq \pm 1$ και $\gamma \neq \pm 1$.
Οι αριθμοί 1 και -1 δε χαρακτηρίζονται ούτε ως πρώτοι ούτε ως σύνθετοι.
Κάθε πρώτος που διαιρεί ένα δοθέντα ακέραιο λέγεται **πρώτος διαιρέτης** του ακεραίου αυτού. Είναι φανερό ότι ο $-\alpha$ είναι πρώτος, αν και μόνο αν ο α είναι πρώτος. Γι' αυτό στη συνέχεια θα περιοριστούμε **μόνο** σε θετικούς πρώτους. Ανάμεσα στους δέκα αριθμούς 1, 2, 3, ..., 10 οι 2, 3, 5 και 7 είναι πρώτοι, ενώ οι 4, 6, 8, και 10 είναι σύνθετοι. Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός άρτιος που είναι πρώτος, όλοι οι άλλοι πρώτοι είναι περιττοί.

Ένα εύλογο ερώτημα είναι το εξής:
"Αν δοθεί ένας θετικός ακέραιος α, πώς μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι πρώτος ή σύνθετος και, στην περίπτωση που είναι σύνθετος, πώς μπορούμε πρακτικά να βρούμε ένα διαιρέτη διαφορετικό από τους 1 και α";

Η προφανής απάντηση είναι να κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις με τους ακεραίους που είναι μικρότεροι του α. Αν κανένας από αυτούς δε διαιρεί τον α, τότε ο α είναι πρώτος. Αν και η μέθοδος αυτή είναι πολύ απλή στην περιγραφή της, δεν μπορεί να θεωρηθεί πρακτική, γιατί έχει απαγορευτικό κόστος σε χρόνο και εργασία, ιδιαίτερα για μεγάλους αριθμούς.

Υπάρχουν ιδιότητες των σύνθετων ακεραίων που αναφέρονται στα επόμενα