Έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^2+3^{1997}x+2001=0$;

3. Αν α, β είναι δύο περιττοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι

(i) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{8}\in \mathbf{Z}$ και (ii) $\dfrac{\alpha^4+\beta^4-2}{16}\in \mathbf{Z}$.

4. Για ποιες τιμές του ακεραίου κ ο αριθμός $\dfrac{3\kappa+4}{5}$ είναι ακέραιος;

5. Να αποδείξετε ότι:

(i) Το τετράγωνο ενός άρτιου είναι της μορφής $\alpha^2=4\lambda,\ \lambda\in \mathbf{Z}$, ενώ το τετράγωνο ενός περιττού είναι της μορφής $\alpha^2=4\lambda+1,\ \lambda\in \mathbf{Z}$.

(ii) Αν α, β είναι περιττοί ακέραιοι, τότε η εξίσωση $x^2=\alpha^2+\beta^2$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(iii) Κανένας από τους όρους της αριθμητικής προόδου: 6, 10, 14, 18, 22, ... δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

4.3 *ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ*

Εισαγωγή

Στα “Στοιχεία” του Ευκλείδη, βιβλία VII, VIII και IX (περίπου 300 π.Χ.), οι θετικοί ακέραιοι παριστάνονται ως ευθύγραμμα τμήματα και η έννοια της διαιρετότητας συνδέεται άμεσα με τη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Ο Ευκλείδης στην αρχή του βιβλίου VII δίνει 22 ορισμούς, μεταξύ των οποίων και οι εξής:

Διαιρέτης: *Μέρος εστίν αριθμός αριθμού ο ελάσσων του μείζονος, όταν καταμετρή τον μείζονα.*

Πολλαπλάσιο: *Πολλαπλάσιος δε ο μείζων του ελάσσονος, όταν καταμετρήται υπό του ελάσσονος.*

Άρτιος αριθμός: *Άρτιος αριθμός έστιν ο δίχα διαιρούμενος.*

Περιττός αριθμός: *Περισσός δε ο μη διαιρούμενος δίχα ή ο μονάδι διαφέρων αρτίου αριθμού.*

Πρώτος αριθμός: *Πρώτος αριθμός έστιν ο μονάδι μόνη μετρούμενος.*

Πρώτοι μεταξύ τους: *Πρώτοι προς αλλήλους αριθμοί εισίν οι μονάδι μετρούμενοι κοινώ μέτρω.*

Τελευταίος δίνεται ο ορισμός του τέλειου αριθμού, δηλαδή αυτού που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του, για παράδειγμα, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$:

Τέλειος αριθμός έστιν ο τοις εαυτού μέρεσιν ίσος ών.

Το ενδιαφέρον των αρχαίων μαθηματικών για τους τέλειους αριθμούς φαίνεται ότι προκλήθηκε από την εξαιρετική σπανιότητά τους. Είναι χαρακτηριστική η παρατήρηση του M. Mersenne (1588-1642) ότι "οι τέλειοι αριθμοί είναι τόσο σπάνιοι όσο και οι τέλειοι άνθρωποι".

Η Θεωρία Αριθμών αρχίζει στο βιβλίο VII με δύο προτάσεις για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών (Ευκλείδειος αλγόριθμος) και ολοκληρώνεται στην τελευταία πρόταση του βιβλίου IX με μια μέθοδο προσδιορισμού τέλειων αριθμών. Με σύγχρονο συμβολισμό, στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι:

Αν ο αριθμός $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{\nu-1} = 2^\nu - 1$ *είναι πρώτος, τότε ο αριθμός* $2^{\nu-1}(2^\nu - 1)$ *είναι τέλειος*.

Έτσι, η γνώση ενός πρώτου αριθμού της μορφής $2^\nu - 1$ οδηγεί αμέσως στην ανακάλυψη ενός τέλειου αριθμού. Οι πρώτοι 5 αριθμοί αυτού του είδους είναι οι $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$, $2^{13} - 1 = 8191$ και μας δίνουν τους πρώτους 5 τέλειους αριθμούς 6, 28, 496, 8128 και 33550336. Μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί 36 τέλειοι αριθμοί.

Έννοια Διαιρετότητας

Στην ευκλείδεια διαίρεση ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή η περίπτωση της τέλειας διαίρεσης. Την περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο **β διαιρεί τον α** και θα γράφουμε **$\beta \mid \alpha$**, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\alpha = \kappa\beta$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **διαιρέτης** ή **παράγοντας** του α ή ότι ο **α διαιρείται με τον β** ή ακόμα ότι ο **α είναι πολλαπλάσιο του β**, και γράφουμε **α = πολβ**.

Για να δηλώσουμε ότι ο ακέραιος β δε διαιρεί τον ακέραιο α, γράφουμε $\beta \nmid \alpha$ ή ισοδύναμα $\alpha \neq$ πολβ. Για παράδειγμα, $5 \mid 20$, αφού $20 = 4 \cdot 5$, ενώ $5 \nmid 18$, αφού η διαίρεση του 18 με τον 5 δεν είναι τέλεια.