4 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

4.1 Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Εισαγωγή

Η Θεωρία Αριθμών, δηλαδή η μελέτη των ιδιοτήτων των θετικών ακεραίων, έθεσε από πολύ νωρίς τους μαθηματικούς μπροστά στο εξής πρόβλημα:
“Κάποια πρόταση αληθεύει για ορισμένες περιπτώσεις ακεραίων. Είναι όμως αδύνατο να εξεταστούν όλες οι ειδικές περιπτώσεις. Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει γενικά;”
Μια από τις πλέον ισχυρές μεθόδους για τη λύση αυτού του προβλήματος είναι η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής. Ο (ελληνικής καταγωγής) Ιταλός μαθηματικός Francesco Mauroliko (Μαυρόλυκος) απέδειξε το 1557 ότι:

> *“Το άθροισμα ενός πλήθους περιττών σε διαδοχική σειρά, με αφετηρία τη μονάδα, δίνει το τετράγωνο του πλήθους των περιττών.”*
>
> [δηλαδή, με σύγχρονο συμβολισμό, $1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2$].

Για την απόδειξη ο Μαυρόλυκος χρησιμοποίησε την πρόταση

> *“Κάθε τετράγωνο, όταν αυξάνεται με τον επόμενό του στην τάξη περιττό, δίνει το επόμενο στην τάξη τετράγωνο”.*
>
> [δηλαδή την ταυτότητα $\nu^2+(2\nu+1)=(\nu+1)^2$].

Ουσιαστικά έδειξε λοιπόν ότι υπάρχει ένας γενικός τρόπος μετάβασης από μια περίπτωση στην αμέσως επόμενη. Η μέθοδος αυτή διατυπώθηκε με σαφήνεια από τον Blaise Pascal, το 1654, στην πραγματεία του για το αριθμητικό τρίγωνο. Διατυπώνοντας μια ιδιότητα που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου, ο Pascal έγραψε τα εξής:

> *“Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα.*
>
> *Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.*
>
> *Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.*

Από αυτό γίνεται φανερό ότι η πρόταση αληθεύει σε κάθε περίπτωση, γιατί η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή, λόγω του πρώτου λήμματος. Έτσι λόγω του δευτέρου λήμματος θα ισχύει και στην 3η γραμμή, άρα και στην 4η κ.ο.κ., μέχρι το άπειρο."

Οι όροι "μαθηματική επαγωγή" ή "τέλεια επαγωγή", καθιερώθηκαν στη διάρκεια του 19ου αιώνα με τις εργασίες των A. de Morgan (1838) και R. Dedekind (1887), για να γίνει διάκριση από την "ατελή επαγωγή" που χρησιμοποιείται στις Φυσικές Επιστήμες.

Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το άθροισμα

$$1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)$$

για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο ν.

Υπολογίζουμε το άθροισμα αυτό για μερικές τιμές του ν και έχουμε:

$$\begin{array}{lrl}
\text{Για } \nu=1, & 1=1 & (=1^2) \\
\text{Για } \nu=2, & 1+3=4 & (=2^2) \\
\text{Για } \nu=3, & 1+3+5=9 & (=3^2) \\
\text{Για } \nu=4, & 1+3+5+7=16 & (=4^2)
\end{array}$$

Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα μας οδηγούν στην εικασία ότι:

$$1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2. \qquad (1)$$

Επειδή το πλήθος των θετικών ακεραίων είναι άπειρο, συνεχίζοντας με τον παραπάνω τρόπο, είναι αδύνατο να αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους.

Αν όμως μπορούσαμε να δείξουμε ότι όταν αληθεύει ο ισχυρισμός (1) για αυθαίρετο θετικό ακέραιο ν θα αληθεύει και για τον επόμενό του $\nu+1$, τότε ο ισχυρισμός θα ίσχυε για όλους τους θετικούς ακεραίους. Γιατί τότε, αφού ο ισχυρισμός είναι αληθής για $\nu=1$, θα είναι αληθής και για $\nu=1+1=2$, συνεπώς και για $\nu=2+1=3$ και διαδοχικά για κάθε θετικό ακέραιο.

Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι

$$1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2,$$

τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)+(2\nu+1) &= [1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)]+(2\nu+1) \\
&= \nu^2+2\nu+1 \\
&= (\nu+1)^2.
\end{aligned}$$