

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η θεωρία των παραλλήλων

Το αίτημα του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του ο Ευκλείδης ορίζει ως παράλληλες «τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον και από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά» (Ορισμός 23).



Αμέσως μετά διατυπώνει πέντε αιτήματα, τα τέσσερα πρώτα από τα οποία εκφράζουν τις βασικές ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, ενώ το πέμπτο αποφαίνεται ότι:

«Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές» (Αίτημα V).

Το αίτημα αυτό αποδεικνύεται ισοδύναμο με τις εξής προτάσεις:

- (E1) Υπάρχει ευθεία a και σημείο A εκτός αυτής τέτοιο, ώστε από το A διέρχεται μία μοναδική ευθεία που δεν τέμνει την a .
- (E2) Υπάρχει τετράπλευρο με τέσσερις ορθές γωνίες.
- (E3) Το άθροισμα των γωνιών τυχόντος τριγώνου ισούται με δύο ορθές.
- (E4) Υπάρχει τρίγωνο, το άθροισμα των γωνιών του οποίου να ισούται με δύο ορθές.
- (E5) Αν μια ευθεία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες, οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες.
- (E6) Τα σημεία που κείνται προς το ίδιο μέρος από δεδομένη ευθεία και σε μία και την αυτή απόσταση, σχηματίζουν ευθεία.
- (E7) Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και αυτές αποκλίνουν η μία από την άλλη από το ένα μέρος, τότε από το άλλο μέρος συγκλίνουν.
- (E8) Υπάρχουν όμοια τρίγωνα.
- (E9) Υπάρχουν τρίγωνα με οσοδήποτε μεγάλο μέγεθος.

(E10) Έστω a τυχούσα ευθεία και A σημείο εκτός αυτής. Τότε στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία a και το σημείο A υπάρχει όχι περισσότερες από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και δεν τέμνει την ευθεία a (Αξίωμα παραλληλίας).

Το αίτημα του Ευκλείδη ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην αρχαιότητα και το Βυζάντιο. Είναι πιθανό πριν τη διατύπωση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» του Ευκλείδη να υπήρξαν προσπάθειες να αποδειχθεί. Όμως οι διαθέσιμες μαρτυρίες είναι πενιχρότατες και αποσπασματικές. Ενδείξεις υπάρχουν στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, όπου συνδέεται το πρόβλημα των παραλλήλων με την πρόταση (E3). Ο Αριστοτέλης ασκεί κριτική στις προσπάθειες μαθηματικών (που δεν κατονομάζονται) να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα ότι υποπίπτουν στο λογικό σφάλμα της «κλήψης του ζητουμένου» (*petitio principii*), δηλαδή ότι κατά την απόδειξη χρησιμοποιούν πρόταση ισοδύναμη προς την αποδεικτέα. Άλλη πηγή είναι τα «Σχόλια για τις δυσκολίες στην εισαγωγή του βιβλίου του Ευκλείδη» του Ομάρ Χαγιάμ όπου αναφέρει ότι «η αιτία του λάθους των ύστερων επιστημόνων στην απόδειξη αυτής της υπόθεσης είναι ότι δε λάμβαναν υπόψη τους τις αρχές του φιλοσόφου [δηλαδή, του Αριστοτέλη]» και παραθέτει πέντε αρχές, τέσσερις από τις οποίες απαντώνται με λίγο διαφορετική διατύπωση στα «Φυσικά» και το «Περί Ουρανού».

Το πρώτο γνωστό έργο της αρχαιότητας, που λίγες μόλις δεκαετίες μετά τα «Στοιχεία» αναφέρεται στη θεωρία των παραλλήλων, είναι η χαμένη πραγματεία του Αρχιμήδη «Περί παραλλήλων», που μνημονεύει ο βιβλιογράφος Ιμπν αλ-Ναντίμ (πέθανε το 993) στο «Βιβλίο της βιβλιογραφίας των επιστημών», μαζί με άλλα έργα του Αρχιμήδη που διασώθηκαν μόνο στα Αραβικά. Το βιβλίο αυτό ήταν πιθανότατα γνωστό στον Θαμπίτ ιμπν Κούρρα (836-901), συγγραφέα δύο πραγματειών σχετικών με τη θεωρία των παραλλήλων. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου, ο οποίος θεωρεί ότι το αίτημα του Ευκλείδη είναι θεώρημα και επιχειρεί να δώσει μια δική του απόδειξη, ο Ποσειδώνιος είχε προτείνει έναν ορισμό των

παραλλήλων, διαφορετικό από αυτόν του Ευκλείδη. Παράλληλες ονομάζει τις ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δε συγκλίνουν ούτε



αποκλίνουν και όλες οι κάθετες από τα σημεία της μιας προς την άλλη είναι ίσες μεταξύ τους.

Ο ορισμός αυτός όμως βασίζεται στο ισοδύναμο αξίωμα (E6). Ο Πρόκλος αναφέρεται επίσης εκτεταμένα στις προσπάθειες του Κλαύδιου Πτολεμαίου και

άλλων μαθηματικών, τους οποίους δεν κατονομάζει, να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα.

Με την απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος ασχολήθηκε ο Διόδωρος (1ος αι. π.Χ.). Στα Αραβικά διατηρήθηκαν και οι προσπάθειες κάποιου Αγάνη και του Σιμπλίκιου που στηρίζονται στον ορισμό του Ποσειδωνίου και, επομένως, στο αξίωμα (E6).

Η θεωρία των παραλλήλων στα Αραβικά μαθηματικά. Η πρώτη γνωστή προσπάθεια απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στα Αραβικά μαθηματικά έγινε από τον αλ-Τζαουχαρί στο έργο του «Τελειοποίηση του βιβλίου των «Στοιχείων»», το περιεχόμενο του οποίου μεταφέρει ο Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί. Όμως στην απόδειξή του χρησιμοποιεί την ισοδύναμη προς το αποδεικτέο πρόταση ότι «αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, τότε το ίδιο ισχύει όταν οι δύο ευθείες τέμνονται από οποιαδήποτε άλλη ευθεία». Οι πρώτες προσπάθειες αντικατάστασης του Ευκλείδειου αιτήματος με το αξίωμα της ύπαρξης «ισαπεχουσών» ευθειών ανάγονται στον αλ-Ναϊρίζι και τον Ιμπν Σίνα (Αβικέννα).

Οι Άραβες μαθηματικοί ανέπτυξαν δύο κυρίως προσεγγίσεις στην απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος, που εγκαινιάζονται στο έργο του Θαμίπν Ιμπν Κούρρα (908-946): τη γεωμετρική και την κινηματική προσέγγιση. Η κινηματική προσέγγιση ακολουθεί το πνεύμα του Αρχιμήδη και αναπτύχθηκε από τον Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, την οποία ακολούθησαν συχνά οι γεωμέτρες στη συνέχεια, είναι ότι υποθέτει την ύπαρξη ενός τετραπλεύρου με τρεις ορθές γωνίες και εξετάζει τις περιπτώσεις η τέταρτη γωνία να είναι οξεία ή αμβλεία,

προσπαθώντας να καταλήξει σε αντίφαση με τον ορισμό των παραλλήλων ως «ισαπεχουσών» ευθειών. Η γεωμετρική προσέγγιση αναπτύχθηκε κυρίως από τον Ομαρ Χαγιάμ. Ξεκινώντας από την απόδειξη της πρότασης (E2) και με συλλογισμούς συγγενείς με αυτούς του Πρόκλου, αποδεικνύει το Ευκλείδειο αίτημα χωρίς να υποπέσει στο λογικό σφάλμα της «λήψης του ζητουμένου». Ο εγκυκλοπαιδιστής φιλόσοφος, μαθηματικός και αστρονόμος Νασίρ αντ-Ντιν αλ-Τουσί (1201-1274) στη δική του πρωτότυπη απόδειξη του αξιώματος των παραλλήλων ακολουθεί το ύφος του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, αλλά στηρίζεται σε αξίωμα που αποτελεί ισχυρότερη μορφή του αιτήματος παραλληλίας.

Στη διάρκεια του 13ου αι. συνεχίζονται οι αναζητήσεις απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος. Ο αλ-Χαναφί, ακολουθώντας παλαιότερες τάσεις που εκδηλώνονται στο έργο του αλ-Κιντί, του αλ-Μπιρουνί (973-περ. 1050) και του Ομάρ Χαγιάμ, συνδέουν το πρόβλημα του Ευκλείδειου αιτήματος με την έννοια της επ' άπειρον διαιρετότητας των γεωμετρικών μεγεθών. Ιδιαίτερα διαδεδομένη ήταν η θεωρία των παραλλήλων του αλ-Αμπχαρί (ή αλ-Αμπχαχρί, πέθανε το 1263). Συγγενής προς αυτήν ήταν η θεωρία του αλ-Μαγκριμπί. Στις δύο τελευταίες θεωρίες βρίσκει κανείς ίχνη του ύφους των συλλογισμών του Σιμπλίκιου. Στα τέλη του 13ου-αρχές 14ου αι. μια ακόμα αξιοσημείωτη προσπάθεια γίνεται από τον αντ-Ντιν ασ-Σιραζί (1236-1311), μαθητή του αλ-Τουσί.

Παρ' όλες τις προσπάθειες που σκιαγραφήσαμε οι Άραβες μαθηματικοί ήταν πολύ μακριά από την ιδέα ότι είναι δυνατή μια άλλη γεωμετρία. Απλώς προσπαθούσαν να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα από υποθέσεις που θεωρούσαν πιο προφανείς. Στην πορεία των προσπαθειών τους απέδειξαν την ισοδυναμία του Ευκλείδειου αιτήματος με διάφορες προτάσεις που μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες με το πέμπτο αίτημα, καθώς και πολλά θεωρήματα που σήμερα emπίπτουν στο πεδίο της Υπερβολικής και της Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην Ευρώπη από τον 13ο ως το 18ο αι. Η πρώτη γνωστή απόπειρα απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στη μεσαιωνική Ευρώπη απαντάται το 13ο αι. στο σύγγραμμα του Βιτέλο (Vitelo, περίπου 1225-1280) «Οπτική» ή «Προοπτική» (1572). Βασική

πηγή του Βιτέλο είναι το έργο του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ. Ωστόσο, η απόδειξή του υστερεί ως προς το επίπεδο αυστηρότητας που είχαν φτάσει οι Άραβες μαθηματικοί.

Δύο άλλες απόπειρες απαντώνται το 14ο αι. στα «Σχόλια» του Γερσωνίδη (Levi ben Gerson ή Gersonides, 1288-1344) και στο έργο κάποιου Αλφόνσο, ο οποίος εικάζεται ότι είναι ο Ισπανός ιατρός και συγγραφέας πολεμικών θρησκευτικών έργων Αλφόνσο του Βαλλαντολίντ (1270-1346).

Στις αρχές του 16ου αι. η θεωρία παραλλήλων εξετάζεται στο «Κάτοπτρο αστρονομικό που περικλείει την ανθρώπινη σοφία σε κάθε επιστήμη» του Φ. Μπ. Γκρισογκόνο (1472-1538), που εκδίδεται στη Βενετία το 1507. Το 1574 εμφανίζεται μία πρωτότυπη απόδειξη του πέμπτου αιτήματος από τον Κλάβιο (Clavius (Schlussel), 1537-1612) που εργαζόταν στη Ρώμη και συμμετείχε στην επεξεργασία του Γρηγοριανού ημερολογίου. Η απόδειξη του Κλάβιου στηρίζεται στην πρόταση (E6). Η απόδειξή του παρουσιάζει ομοιότητες με αυτές του Ιμπν Κούρρα και του Ιμπν αλ-Χαϊθάμ, τις οποίες ίσως γνώριζε από δεύτερο χέρι.

Τον 17ο αι. παρατηρείται κάποια ένταση των προσπαθειών στη θεωρία των παραλλήλων, η οποία όμως δεν απέφερε ιδιαίτερα αξιόλογους καρπούς. Δημοσιεύονται το 1603 στην Μπολόνια δύο τομείδια του Πιέτρο Α. Κατάλντι (1548-1626), το 1658 στην Πίζα η επεξεργασμένη από τον Τζ.Α. Μπορέλλι (1608-1679) έκδοση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, και το 1680 ανάλογη έκδοση των «Στοιχείων» από τον Βιτάλε Τζορντάνο (1633-1711). Το 1693 δημοσιεύεται η πραγματεία του Τζ. Ουώλλις (J. Wallis, 1616-1703) «Το πέμπτο αίτημα και ο πέμπτος ορισμός του Βιβλίου VI του Ευκλείδη», το δεύτερο μέρος της οποίας περιέχει μετάφραση μιας απόδειξης που αποδίδεται στον αλ-Τουσί, και στο τρίτο εκτίθεται απόδειξη του Ουώλλις, που βασίζεται στην πρόταση (E9), την οποία θεωρεί φυσική «Κοινή Έννοια».

Από την πραγματεία του Ουώλλις γνωρίστηκε με την αποδιδόμενη στον αλ-Τουσί απόδειξη του πέμπτου αιτήματος ο Τζιρόλαμο Σακκέρι (G.G. Saccheri, 1667-1733). Ο Σακκέρι ξεκινώντας από το ισόπλευρο τετράπλευρο με τις δύο ορθές του Ομάρ Χαγιάμ και του αλ-Τουσί αναλύει τις ίδιες τρεις υποθέσεις για τις άλλες δύο γωνίες. Αποκλείει την υπόθεση της οξείας γωνίας επειδή θεωρεί ότι στην περίπτωση αυτή, όπως και στην

περίπτωση της ορθής γωνίας ισχύει το πέμπτο αίτημα, δηλαδή επειδή αντιφάσκει στα αξιώματα της συνήθους γεωμετρίας του Ευκλείδη. Στην περίπτωση της αμβλείας γωνίας ο Σακκέρι προχωρεί όσο κανείς άλλος πριν από αυτόν στην απόδειξη θεωρημάτων της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Όμως διολισθαίνοντας σε λάθος συλλογισμό κατέληξε σε αντίφαση, οπότε συμπέρανε ότι η περίπτωση της ορθής γωνίας (δηλαδή της Ευκλείδειας γεωμετρίας) είναι η μόνη δυνατή.

Πιο σημαντική είναι η προσπάθεια του Γερμανού μαθηματικού Λάμπερτ (J.H. Lambert, 1728-1777). Ξεκινώντας από το ίδιο τετράπλευρο του Ομάρ Χαγιάμ και του Σακκέρι αποκλείει χωρίς δυσκολία την υπόθεση της οξείας γωνίας, στη βάση ότι στην περίπτωση αυτή δύο κάθετες στην ίδια ευθεία τέμνονται, πράγμα που, κατά τη γνώμη του, δεν αντιφάσκει στο πέμπτο αίτημα, αλλά στα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Επίσης παρατηρεί ότι η υπόθεση της οξείας γωνίας ισχύει στην επιφάνεια της σφαίρας αν ως ευθείες ληφθούν οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας. Εξετάζοντας την υπόθεση της αμβλείας γωνίας ο Λάμπερτ αποδεικνύει ακόμα περισσότερα και από τον Σακκέρι θεωρήματα της σημερινής Υπερβολικής Γεωμετρίας. Προσπαθώντας να λάβει κάποια παράδοξα αποτελέσματα παραδέχεται ότι δεν είναι εύκολο να αποκλεισθεί η υπόθεση της αμβλείας γωνίας. Αντίθετα με τον Σακκέρι, ούτε υποπίπτει σε σφάλμα, ούτε συμπεραίνει ότι η υπόθεση της αμβλείας γωνίας οδηγεί σε αντίφαση. Αντίθετα, εκφράζοντας κάποια έκπληξη για τις «περίεργες» ιδιότητες των σχημάτων στην περίπτωση αυτή (π.χ. ότι χάνεται η έννοια της ομοιότητας και της αναλογίας των σχημάτων, ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου αυξάνει όσο μειώνεται η επιφάνεια του τριγώνου, κ.α.) διατυπώνει την ιδιαίτερα βαθιά και διορατική σκέψη ότι «η τρίτη υπόθεση ισχύει σε κάποια φανταστική σφαίρα».

Από τις προσπάθειες μετά τον Λάμπερτ, αξίζει να αναφερθεί η «απόδειξη» του Λ. Μπερτράν (L. Bertrand, 1731-1812), μαθητή του Όυλερ, το 1778, του Α.Μ. Λεζάντρ (1752-1833), που αφιέρωσε σαράντα χρόνια στις έρευνες στη θεωρία των παραλλήλων, του Σ.Ε. Γκούριεφ (1764-1813), και του Φαρκάς Μπόλυαϊ (Farkas Bolyai, 1775-1856), του πατέρα του Γιάνος Μπόλυαϊ, του μετέπειτα δημιουργού της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.