

3. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσο του O . Γράφουμε τον κύκλο (A, AO) και τον κύκλο με διάμετρο OB . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται κύκλος (O, R) και εξωτερικό σημείο του P , ώστε $OP < 2R$. Γράφουμε τον κύκλο $(O, 2R)$. Να αποδείξετε ότι:
- ο κύκλος $(O, 2R)$ τέμνει τον κύκλο (P, PO) σε δύο σημεία Γ και Δ ,
 - τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O, R) στα σημεία A και B ,
 - τα PA και PB εφάπτονται στον (O, R) .
2. Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) με $O_1O_2 > R_1 + R_2 > 2R_2$.

i) Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

ii) Εστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον (O_1) στα σημεία M, M' και τον (O_2) στα σημεία N, N' αντίστοιχα με τα M, N μεταξύ των M', N' . Να αποδείξετε ότι $MN \leq AB \leq M'N'$, όπου A, B τυχαία σημεία των κύκλων (O_1) και (O_2) αντίστοιχα.

3. Ένας κύκλος κέντρου K είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου A . Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο P . Να αποδείξετε ότι $\angle KPA = 90^\circ$.
4. Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι γεωμετρικές κατασκευές

Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές προτάσεις διαιρούνται σε «θεωρήματα», όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε «προβλήματα», όπου ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» οι κατασκευές στηρίζονται στα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας).

Ως τα τέλη του 4ου αι. πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι ορισμένα προβλήματα, όπως π.χ. το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμα με τα επιτρεπτά τότε κατασκευαστικά εργαλεία. Έτσι εμφανίζεται η πρώτη ιεράρχηση των προβλημάτων με βάση τα επιτρεπτά κατασκευαστικά εργαλεία επιλυσιμότητάς τους. Ως επίπεδα προβλήματα θεωρούνται αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, στερεά προβλήματα είναι εκείνα που λύνονται με τη βοήθεια κωνικών τομών, και γραμμικά προβλήματα είναι όλα τα υπόλοιπα. Ο Πάππος μάλιστα θεωρούσε σοβαρό λάθος τη λύση ενός επίπεδου προβλήματος με τη βοήθεια κωνικών τομών.

Γεωμετρικές κατασκευές

Στην §2.7 αναφέραμε την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια: την **κατασκευή** (ή **σύνθεση**), την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

- Η **κατασκευή** είναι όλες εκείνες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος.
- Η **απόδειξη** είναι η επιβεβαίωση ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία τα δοσμένα.
- Η **διερεύνηση** είναι η αναγραφή όλων εκείνων των συνθηκών, που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στη διερεύνηση εξετάζεται επίσης και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή, τότε, πριν από την κατασκευή κάνουμε, ως βοηθητικό βήμα, και τη λεγόμενη **ανάλυση**. Σε προβλήματα επόμενων κεφαλαίων θα χρησιμοποιήσουμε και την ανάλυση.