ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

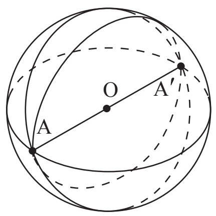
Γεωμετρία της σφαίρας

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

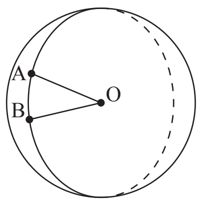
Στο Παράρτημα αυτό θα παρουσιαστεί μία σύντομη εισαγωγή στη Γεωμετρία της σφαίρας, θα μελετήσουμε δηλαδή, κατ′ αναλογία με τη γεωμετρία του επιπέδου, ιδιότητες σχημάτων στην επιφάνεια της σφαίρας.

2. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Σε μια σφαίρα κέντρου Ο (σχ.1), υπάρχουν άπειροι μέγιστοι κύκλοι, που περνάνε από ένα σημείο της Α. Οι μέγιστοι αυτοί κύκλοι ορίζονται ως τομή της σφαίρας με τα επίπεδα που περνάνε από την ακτίνα ΟΑ. Παρατηρούμε όμως ότι αυτοί οι κύκλοι διέρχονται και από ένα δεύτερο σημείο Α′, το αντιδιαμετρικό σημείο του Α.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

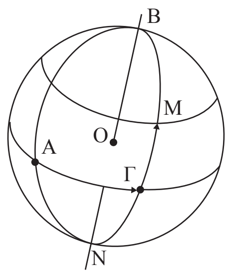
Δύο σημεία Α και Β μη αντιδιαμετρικά στην επιφάνεια της σφαίρας (σχ.2), ορίζουν έναν και μόνο ένα μέγιστο κύκλο που περιέχει τα σημεία αυτά. Αποδεικνύεται ότι το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου είναι η συντομότερη απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων, μετρημένη πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Κάθε άλλη γραμμή που συνδέει τα δύο αυτά σημεία, πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας έχει μήκος μεγαλύτερο από αυτό του τόξου ΑΒ. Έχουμε λοιπόν τις προτάσεις:

- **Από κάθε σημείο μιας σφαίρας διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι.**
- **Δύο τυχόντες μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία.**
- **Δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία σε μία σφαίρα ορίζουν ένα μέγιστο κύκλο.**

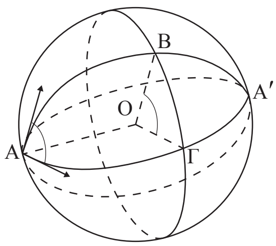
Ονομάζουμε ***γωνιακή απόσταση*** ή ***απόσταση*** μεταξύ δύο σημείων Α και Β μιας σφαίρας το μικρότερο από τα δύο τόξα ΑΒ του μέγιστου κύκλου που αυτά ορίζουν. Είναι το ίδιο αν ορίσουμε την απόσταση ως την επίκεντρη κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ (σχ.2), που ορίζουν τα δύο σημεία Α και Β, με το κέντρο Ο της σφαίρας. Το τόξο ή η γωνία μπορεί να μετρηθεί σε ορθές, μοίρες ή ακτίνια. Εάν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, τότε τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους και επιλέγουμε ένα από τα δύο για να μετρήσουμε την απόστασή τους.

Ονομάζουμε ***γωνία δύο μέγιστων κύκλων*** τη δίεδρη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα των δύο κύκλων. ***Άξονας*** ενός μέγιστου κύκλου λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου, στο κέντρο της σφαίρας. ***Πόλοι*** ενός κύκλου λέγονται τα σημεία τομής του άξονα του κύκλου με τη σφαίρα. Οι πόλοι είναι προφανώς αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας. Όταν αναφερόμαστε στον πόλο ενός μέγιστου κύκλου θα εννοούμε έναν από τους δύο πόλους.

Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου επάνω στη σφαίρα, χρησιμοποιείται το εξής σύστημα αναφοράς. Θεωρούμε ένα μέγιστο κύκλο, που τον λέμε ***ισημερινό***, τους ***παράλληλους*** μικρούς κύκλους και τους ***πόλους*** του Β και Ν (σχ.3). Ο ένας πόλος λέγεται ***βόρειος*** και ο άλλος ***νότιος***. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνάνε από τους πόλους Β και Ν λέγονται ***μεσημβρινοί***.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Το σημείο τομής Α του ισημερινού με έναν συγκεκριμένο μεσημβρινό θεωρείται αρχή των μετρήσεων. Ένα σημείο της σφαίρας Μ βρίσκεται στην τομή ενός παραλλήλου και ενός μεσημβρινού (σχ.3). Το τόξο ΓΜ από τον ισημερινό μέχρι τον παράλληλο του σημείου Μ λέγεται ***πλάτος,*** ενώ το τόξο επί του ισημερινού από την αρχή Α των μεσημβρινών μέχρι του μεσημβρινού ΓΜ του σημείου Μ λέγεται ***μήκος***. Το πλάτος παίρνει τιμές από –90° (νότιος πόλος) μέχρι +90° (βόρειος πόλος) ενώ το μήκος +180° προς τη μία κατεύθυνση του ισημερινού και –180° προς την άλλη. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται στη Γεωγραφία, την Αστρονομία και τα Μαθηματικά με διάφορα ονόματα.

Προτάσεις

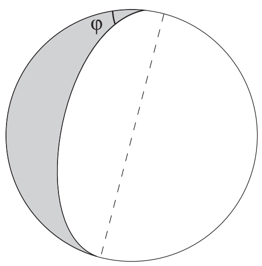
- **Η γωνία δύο μέγιστων κύκλων ισούται με τη γωνία των εφαπτομένων των μέγιστων κύκλων σ'**

ένα σημείο τομής και έχει μέτρο ίσο με το τόξο του μέγιστου κύκλου που έχει ως πόλους τα κοινά σημεία των δύο κύκλων (σχ.4).

- **Η γωνία δύο μέγιστων κύκλων ισούται με την απόσταση των πόλων τους (σχ.4).**
- **Δύο μέγιστοι κύκλοι είναι κάθετοι αν και μόνον αν καθένας από αυτούς περιέχει τον πόλο του άλλου.**
- **Από τον πόλο ενός μέγιστου κύκλου άγονται άπειρα τόξα, κάθετα στο μέγιστο κύκλο.**

3. ΑΤΡΑΚΤΟΙ ΚΑΙ ΟΝΥΧΕΣ

Το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ δύο ημιπεριφερειών μέγιστων κύκλων λέγεται ***άτρακτος*** (σχ.5). Η γωνία των ημιπεριφερειών λέγεται ***γωνία του άτρακτου***. ***Σφαιρικός όνυχας*** λέγεται το μέρος του όγκου της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ των δύο ημικυκλίων μέγιστων κύκλων. ***Βάση του σφαιρικού όνυχα*** λέγεται ο άτρακτος που περιέχεται μεταξύ των ημικυκλίων.



Σχήμα 5

Γωνία σφαιρικού όνυχα λέγεται η γωνία της βάσης του όνυχα.

Αποδεικνύονται οι εξής προτάσεις:

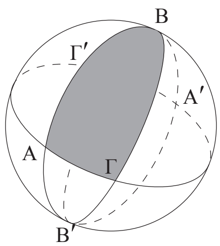
- **Δύο άτρακτοι, στην ίδια σφαίρα, με ίσες γωνίες είναι ίσοι.**
- **Ο λόγος των εμβαδών δύο ατράκτων στην ίδια σφαίρα ισούται με το λόγο των γωνιών τους.**

4. ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Σφαιρικό τρίγωνο λέγεται το μέρος της σφαίρας το οποίο περικλείεται μεταξύ των τόξων τριών μέγιστων κύκλων, με την προϋπόθεση ότι τα τόξα είναι μικρότερα από ημικύκλια.

Παράδειγμα

Το σχήμα ΑΒΓ (σχ.6) είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο. Τα σημεία τομής των μέγιστων κύκλων Α, Β, Γ λέγονται ***κορυφές*** και τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγονται ***πλευρές*** του σφαιρικού τριγώνου. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ανά δύο λέγονται ***γωνίες*** του σφαιρικού τριγώνου και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα των κορυφών Α, Β, Γ. Τις πλευρές του τριγώνου τις συμβολίζουμε συνήθως με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών, δηλαδή συμβολίζουμε με α, β, γ τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα.



Σχήμα 6

Πρέπει να τονίσουμε ότι η γεωμετρία στη σφαίρα δεν επηρεάζεται από την ακτίνα της, διότι όλα τα μετρούμενα μεγέθη, μήκη πλευρών και γωνίες κορυφών, μετρώνται με τόξα μέγιστων κύκλων και όχι με μήκη.

Είδη σφαιρικών τριγώνων

Ένα σφαιρικό τρίγωνο χαρακτηρίζεται αναλόγως των πλευρών ή των γωνιών του ως εξής:

ως προς τις γωνίες:	ως προς τις πλευρές:
(μονο)ορθογώνιο: μία γωνία ορθή	**(μονο)ορθόπλευρο:** μία πλευρά ορθή
δισορθογώνιο: δύο γωνίες ορθές	**δισορθόπλευρο:** δύο πλευρές ορθές
τρισορθογώνιο: τρεις γωνίες ορθές	**τρισορθόπλευρο:** τρεις πλευρές ορθές
	ισοσκελές: δύο πλευρές ίσες
	ισόπλευρο: τρεις πλευρές ίσες

Θεωρούμε ως **μονάδα μέτρησης γωνιών και πλευρών την ορθή γωνία** και ως **μονάδα μέτρησης των εμβαδών αυτό του τρισορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου**, δηλαδή το $\frac{1}{8}$ της σφαίρας. Με αυτές τις μονάδες μέτρησης προκύπτουν οι ακόλουθες προτάσεις:

- **Το εμβαδόν ενός ατράκτου ισούται με το διπλάσιο της γωνίας του.**

Απόδειξη

Θεωρούμε τον άτρακτο ΒΟΑ, σχ.5, με γωνία φ και τον ορθογώνιο άτρακτο ΒΟΓ. Ο λόγος των εμβαδών τους είναι όπως ο λόγος των γωνιών τους, δηλαδή:

$$\frac{\text{ατρ.ΒΟΑ}}{\text{ατρ.ΒΟΓ}} = \frac{\text{Β}\hat{\text{Ο}}\text{Α}}{\text{Β}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}} = \varphi \qquad (1)$$

Αλλά ο άτρακτος ΒΟΓ ισούται με δύο τρισορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα, επομένως, η σχέση (1) γράφεται: ατρ(ΒΟΑ) = 2φ.

Σφαιρική υπεροχή ενός τριγώνου ΑΒΓ λέγεται η διαφορά (Α + Β + Γ − 2).

- **Το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου ισούται με τη σφαιρική υπεροχή του τριγώνου.**

Απόδειξη

Ο άτρακτος που σχηματίζει η γωνία $\hat{\text{Α}}$ του τριγώνου

ΑΒΓ, (σχ.6), χωρίζεται από τη ΒΓ σε δύο τρίγωνα, επομένως, για τα εμβαδά τους ισχύει:

ατρ. $\hat{A}$ = εμ.(ΑΒΓ) + εμ.(Α΄ΒΓ) (1)

Όμοια:

ατρ. $\hat{B}$ = εμ.(ΑΒΓ) + εμ.(ΑΒ΄Γ) (2)

ατρ. $\hat{\Gamma}$ = εμ.(ΑΒΓ) + εμ.(ΑΒΓ΄) = εμ.(ΑΒΓ) + εμ.(Α΄Β΄Γ) (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

ατρ. $\hat{A}$ + ατρ $\hat{B}$ + ατρ $\hat{\Gamma}$ = ημισφ ΑΒ + 2 εμ.(ΑΒΓ),

και επειδή η μονάδα είναι η ορθή γωνία, έχουμε:

$$2A + 2B + 2\Gamma = 4 + 2\text{εμβ.}(AB\Gamma) \Rightarrow \text{εμ.}(AB\Gamma) = A + B + \Gamma - 2.$$

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- **κάθε πλευρά είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων.**
- **το άθροισμα των τριών πλευρών είναι μικρότερο των τεσσάρων ορθών.**
- **το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών.**
- **απέναντι άνισων πλευρών βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες.**
- **αν είναι ισοσκελές έχει τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι των ίσων πλευρών ίσες. Επίσης, η διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.**
- **αν είναι ισόπλευρο είναι και ισογώνιο.**
- **τα κάθετα τόξα μέγιστων κύκλων στα μέσα των πλευρών του (μεσοκάθετοι), περνάνε από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.**
- **τα τόξα μέγιστων κύκλων που διχοτομούν τις γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου (διχοτόμοι), περνάνε από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου.**
- **τα τόξα μέγιστων κύκλων που περνάνε από τις κορυφές και είναι κάθετα στις απέναντι πλευρές (ύψη) περνάνε από το ίδιο σημείο.**
- **ισχύουν τα Θεωρήματα του συνημιτόνου και ημιτόνου:**

$$\text{συνα} = \text{συνβ συνγ} + \text{ημβ ημγ συνΑ}$$

$$\frac{\text{ημα}}{\text{ημΑ}} = \frac{\text{ημβ}}{\text{ημΒ}} = \frac{\text{ημγ}}{\text{ημΓ}}.$$

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Η Σφαιρική Γεωμετρία έχει εφαρμογές στην Αστρονομία, Ναυσιπλοΐα, Χαρτογραφία και αλλού.

Στην Αστρονομία, εφαρμόζεται στη μελέτη προβλημάτων που δεν μας ενδιαφέρει η απόσταση των ουρανίων σωμάτων από τη Γη αλλά η θέση τους στον ουράνιο θόλο που θεωρείται σφαιρικός με κέντρο το κέντρο της Γης.

Η Γη θεωρείται κατά προσέγγιση σφαιρική, επομένως η σφαιρική γεωμετρία έχει εφαρμογές και στις επιστήμες που σχετίζονται με το σχήμα της Γης. Μία από αυτές είναι η Ναυσιπλοΐα και χρησιμεύει για να γίνονται υπολογισμοί πορείας.

Είναι γνωστό από την αρχαιότητα ότι η επιφάνεια της σφαίρας δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Δηλαδή, δεν μπορούμε να αναπτύξουμε τη σφαίρα στο επίπεδο όπως κάναμε με τον κύλινδρο και τον κώνο. Εάν προσπαθήσουμε να κάνουμε αυτό το ανάπτυγμα, θα τσαλακώσουμε ή θα σκίσουμε την επιφάνεια της σφαίρας. Αυτό συμβαίνει διότι η σφαίρα έχει καμπυλότητα που διαφέρει ποιοτικά από αυτήν του κυλίνδρου ή του κώνου. Λόγω αυτής της ιδιότητας οι χάρτες δεν μπορεί να είναι ακριβείς.

6. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι στη γεωμετρία της σφαίρας, το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές, σε αντίθεση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία όπου το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές. Η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με τη μη ύπαρξη παράλληλων «ευθειών», δηλαδή κάθε δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται. Η γεωμετρία αυτή λέγεται σφαιρική ή Ελλειπτική Γεωμετρία.

Υπάρχουν επίσης γεωμετρίες στις οποίες το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων τους είναι μικρότερο από δύο ορθές, που είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη πολλών παράλληλων ευθειών που άγονται από σημείο εκτός ευθείας. Οι γεωμετρίες αυτές λέγονται Υπερβολικές Γεωμετρίες.