ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

Η αξιωματική μέθοδος

Η αξιωματική μέθοδος είναι ένας τρόπος κατασκευής μιας επιστημονικής θεωρίας, κατά τον οποίο ορισμένες προτάσεις (τα λεγόμενα *αξιώματα* ή *αιτήματα*) λαμβάνονται ως αρχή και από αυτά συνάγονται όλα τα θεωρήματα της θεωρίας με μια ακολουθία συλλογισμών που ονομάζεται *απόδειξη*. Οι κανόνες που ακολουθούν οι συλλογισμοί αυτοί είναι αντικείμενο της επιστήμης της λογικής. Όλες οι έννοιες που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της απόδειξης (εκτός από ένα μικρό αριθμό αρχικών εννοιών) εισάγονται με *ορισμούς*, οι οποίοι επεξηγούν το νόημα των εννοιών αυτών με βάση γνωστές έννοιες ή άλλες έννοιες που έχουν ορισθεί προηγουμένως. Οι επιστήμες που κατασκευάζονται με τη μέθοδο αυτή ονομάζονται *αποδεικτικές* ή *παραγωγικές επιστήμες*.

Η γένεση της αξιωματικής μεθόδου στην κλασσική Ελληνική αρχαιότητα

Η ιδέα της αρχής στην Ελληνική φιλοσοφική σκέψη

Η γένεση της αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά είναι φαινόμενο όχι μόνο μαθηματικού χαρακτήρα. Μαθηματικές γνώσεις είχαν πολλοί λαοί και μεγάλοι πολιτισμοί. Όμως μόνο στην αρχαία Ελλάδα γεννήθηκε η ιδέα να κατασκευαστεί η Γεωμετρία ξεκινώντας από έναν πεπερασμένο αριθμό αρχικών προτάσεων.

Η ιδέα της ενιαίας αρχής του κόσμου εντοπίζεται ήδη στα φιλοσοφικά σχήματα των Ιώνων φιλοσόφων, με τα οποία επιχειρούσαν να ερμηνεύσουν τον κόσμο. Ο Εμπεδοκλής ανέπτυξε τη θεωρία των στοιχείων, από την αλληλεπίδραση των οποίων γεννιέται ο κόσμος. Οι αρχαίοι ατομιστές επεχείρησαν επίσης να ερμηνεύσουν τον κόσμο ξεκινώντας από κάποιες ελάχιστες αδιαίρετες οντότητες. Έτσι η τάση να εξηγηθεί ο κόσμος ξεκινώντας από ένα πεπερασμένο αριθμό αρχικών στοιχείων με κάποιους ορθολογικούς κανόνες δέσποζε στην πνευματική ατμόσφαιρα της αρχαίας Ελλάδας.

Στους κύκλους των φιλοσόφων της Πλατωνικής Ακαδημίας και των Περιπατητικών συζητείται το θέμα των αρχών πάνω στις οποίες πρέπει να κατασκευάζεται μια αποδεικτική επιστήμη. Σύμφωνα με τη θεωρία της επιστήμης του Πλάτωνα, η επιστήμη

1. είναι ένα σύνολο απόλυτων αληθειών,
2. ξεκινά από κάποιες αρχές, από τις οποίες συνάγονται οι αλήθειες της επιστήμης,
3. μελετά ιδεατά αντικείμενα που είναι σταθερά και αμετάβλητα στην πορεία του χρόνου. Απόλυτες αλήθειες μπορούν να διατυπωθούν μόνο για αντικείμενα αυτού του τύπου.

Τα μαθηματικά, κατά τον Πλάτωνα, επιτυγχάνουν την τελειότητα στο βαθμό που οι αρχές τους προκύπτουν από τη λεγόμενη Ιδέα του Αγαθού, που στο φιλοσοφικό σύστημα του Πλάτωνα παίζει ρόλο καθαρού Απολύτου.

Ο Αριστοτέλης, από την άλλη μας άφησε στα «Αναλυτικά Ύστερα» μια αρκετά επεξεργασμένη θεωρία αποδεικτικής επιστήμης. Η γενική λογική δομή μιας αποδεικτικής επιστήμης αποτελείται από όρους και προτάσεις που έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

(I) Η αποδεικτική επιστήμη είναι μια ακολουθία προτάσεων για τα στοιχεία ενός πεδίου αντικειμένων, του γένους (αρχή της ομογένειας).
Οι προτάσεις αυτές διαιρούνται σε αναπόδεικτες ή αρχικές (*αξιώματα, αιτήματα, αρχές, τα πρώτα*), και αποδείξιμες ή παράγωγες (*θεωρήματα*).
Οι όροι της πρότασης διαιρούνται σε μη οριζόμενους ή αρχικούς όρους (*αρχές, τα πρώτα*), και ορίσιμους ή παράγωγους όρους (*τα εκ τούτων*).
Ωστόσο, ο Αριστοτέλης δεν απαιτεί τη ρητή απαρίθμηση όλων των αρχικών προτάσεων και όρων.

(II) Από τις αρχικές προτάσεις, τα αξιώματα είναι προφανή και αναπόδεικτα, ενώ τα αιτήματα είναι υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη, αν και δεν είναι πάντοτε προφανείς.

(III) Οι αρχικοί όροι είναι άμεσα νοητοί και δεν ορίζονται.

(IV) Από τις αρχικές προτάσεις, τα αξιώματα είναι αληθείς και αναγκαίες προτάσεις. Η αλήθεια των αιτημάτων όμως δεν είναι λογικά αναγκαία, αλλά γίνεται δεκτή χωρίς απόδειξη.

Οι αναζητήσεις πάνω στις αρχές της αποδεικτικής επιστήμης στην Ακαδημία του Πλάτωνα και το Λύκειο, συνέτειναν πιθανότατα στη δημιουργία ενός ενιαίου συστήματος αρχών, που αποτέλεσε τη βάση των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη

Η πρωταρχική ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου έχει αφετηρία στα έργα των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών. Η πρώτη προσπάθεια να γραφούν «Στοιχεία» της Γεωμετρίας ανήκει στον Ιπποκράτη το Χίο. Σύμφωνα με μαρτυρία του Πρόκλου, διάφοροι γεωμέτρες επιχείρησαν να γράψουν «Στοιχεία». Στην πορεία της κατασκευής των «Στοιχείων» της Γεωμετρίας τέθηκε πιθανότατα το θέμα να διευκρινιστεί ποιες είναι οι προτάσεις εκείνες από τις οποίες όλες οι άλλες προτάσεις προκύπτουν ως συμπέρασμα. Αν και τα «Στοιχεία» των γεωμετρών αυτών δε διασώθηκαν, είναι ωστόσο λογικό να υποθέσουμε ότι η έκθεση της Γεωμετρίας διέφερε από έργο σε έργο κι ότι οι αρχικές προτάσεις σ' αυτά δεν ήταν οι ίδιες.

Το Βιβλίο Ι των «Στοιχείων» αρχίζει με 23 Ορισμούς οι οποίοι εισάγουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες (σημείο, γραμμή, επιφάνεια, ευθεία, επίπεδο, γωνία, σύνορο, σχήμα) και παράγωγες έννοιες με τη βοήθεια των οποίων ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (ορθή, οξεία και αμβλεία γωνία, κύκλος, τρίγωνα, τετράπλευρα, παράλληλες ευθείες). Ωστόσο, ο ορισμός της έννοιας π.χ. του σημείου ή της ευθείας που δίνει ο Ευκλείδης δε χρησιμοποιείται πουθενά στη συνέχεια στις αποδείξεις των «Στοιχείων».

Τα τρία πρώτα Αιτήματα* διασφαλίζουν την εκτέλεση γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη. Το τέταρτο αίτημα εξασφαλίζει ότι μια ευθεία μπορεί να προεκταθεί κατά μονοσήμαντο τρόπο, και το πέμπτο αίτημα εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείου τομής δύο ευθειών υπό τις συνθήκες του αιτήματος.

Οι Κοινές Έννοιες** είναι προτάσεις που περιγράφουν γενικές ιδιότητες της ισότητας ή ανισότητας μεγεθών. Όλες οι Κοινές Έννοιες εκτός της τέταρτης αφορούν όχι μόνο γεωμετρικά μεγέθη, αλλά και αριθμούς. Μόνον η τέταρτη έχει κατ' εξοχήν γεωμετρικό χαρακτήρα. Γι' αυτό θεωρείται από ορισμένους ιστορικούς των μαθηματικών ότι πιθανόν είναι μεταγενέστερη παρεμβολή.

Η επιλογή των αιτημάτων και των Κοινών Εννοιών είναι εν γένει εύστοχη. Όλες σχεδόν οι προτάσεις αυτές διατηρήθηκαν στο σύγχρονο αξιωματικό σύστημα της Γεωμετρίας. Ωστόσο, δεν είναι επαρκή, από σύγχρονη άποψη, για να θεμελιώσουν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Απουσιάζουν εντελώς έννοιες όπως του «μεταξύ», «από το ίδιο μέρος», «εντός (εκτός) ενός γεωμετρικού σχήματος», και πολλές άλλες που ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί στη συνέχεια κατά τη διαδικασία των αποδείξεων. Όμως αυτό δεν αποτελεί μειονέκτημα από την Αριστοτέλεια άποψη της αποδεικτικής επιστήμης, αφού δεν επιβάλλεται η πλήρης απαρίθμηση όλων των αρχικών προτάσεων, κι επομένως επιτρέπεται η χρήση «προφανών», μη ρητά διατυπωμένων υποθέσεων στην πορεία της απόδειξης.

Η εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου έδωσε τη δυνατότητα της συστηματοποίησης του σώματος των γεωμετρικών προτάσεων κατά την αρχαιότητα και την αποφυγή λογικών λαθών όπως π.χ. οι φαύλοι κύκλοι. Επίσης συνέβαλε στην αποσαφήνιση της λογικής αλληλουχίας των εννοιών, πράγμα που προσέδωσε στη Γεωμετρία ανυπέρβλητη για την εποχή λογική αυστηρότητα.

Η γένεση της νέας αντίληψης της αξιωματικής μεθόδου στα τέλη του 19ου αι.

Ο διαχωρισμός της έννοιας του αξιωματικού συστήματος από την ερμηνεία του

Με την κατάρρευση του αρχαίου Ελληνικού πολιτισμού τα επιστημονικά κέντρα μετατοπίζονται στην Ανατολή και αργότερα στην Ευρώπη. Στη διάρκεια όλων αυτών των αιώνων το σύστημα των «Στοιχείων» παραμένει το ιδεώδες της μαθηματικής αυστηρότητας και το πρότυπο της επιστημονικής μεθόδου. Όμως η αξιωματική μέθοδος δε γνώρισε κάποια ιδιαίτερη ανάπτυξη μέχρι τα τέλη του 19ου αι. Ούτε υπήρξε κάποια σημαντική προσπάθεια βελτίωσης των εγγενών αδυναμιών της. Ο ρόλος της αξιωματικής μεθόδου στα μαθηματικά αρχίζει να αλλάζει σημαντικά από τα μέσα του 19ου αι. όταν ο Λομπατσέφσκι και ο Μπόλυαϊ

* 1. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

** 1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
2. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
4. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
5. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].

απέδειξαν ότι μπορεί να κατασκευασθεί μια Γεωμετρία με αξιώματα διαφορετικά από τα Ευκλείδεια.

Οι σημαντικότερες ίσως αδυναμίες της Ευκλείδειας αξιωματικής μεθόδου σήμερα είναι ότι δεν παρέχει ακριβή περιγραφή του τι συνιστά λογική απόδειξη. Έτσι στους συλλογισμούς υπεισέρχεται το στοιχείο της γεωμετρικής εποπτείας, ιδιαίτερα σε προτάσεις που αφορούν τη συνέχεια των γεωμετρικών σχημάτων και τη σχετική τους θέση στο χώρο. Επίσης δεν υπάρχει σαφήνεια στον ορισμό των εννοιών. Η εισαγωγή των αρχικών εννοιών π.χ. από τον Ευκλείδη γίνεται με επεξηγήσεις που δίνουν την εντύπωση προσπάθειας ορισμού, αλλά παραμένουν μη λειτουργικοί.

Το πιο σημαντικό όμως χαρακτηριστικό του ιδεώδους αυτού είναι ότι η γεωμετρική θεωρία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το μοναδικό της μοντέλο –το φυσικό χώρο– και οι βασικές υποθέσεις της θεωρίας κατανοούνται ως οι χαρακτηριστικές ιδιότητες αυτού του μοντέλου. Ακόμα και με την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας οι μαθηματικοί δε συνειδητοποίησαν αμέσως τη διαμορφούμενη νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου, η οποία μας επιτρέπει να θεωρούμε τη Γεωμετρία ως επιστήμη που κατασκευάζεται από υποθέσεις που δε συνδέονται κατ' ανάγκην με το μοντέλο του φυσικού χώρου. Η Υπερβολική Γεωμετρία φάνταζε στα μάτια των μαθηματικών του 19ου αι. περισσότερο σαν ιδιοφυές παράδοξο στο σώμα της μαθηματικής γνώσης, παρά σαν εναλλακτικό σύστημα Γεωμετρίας, ισότιμο μάλιστα προς το Ευκλείδειο. Για να νομιμοποιηθεί η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία χρειάστηκε να συνδεθεί με τις συνήθεις αντιλήψεις του χώρου στα έργα του Μπελτράμι, του Κλάιν και του Πουανκαρέ, να επινοηθούν ερμηνείες (μοντέλα) της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο πλαίσιο της κλασσικής Γεωμετρίας.

Εκτός όμως από τη Γεωμετρία, τον 19ο αι. εισάγονται και μια σειρά νέες έννοιες, όπως οι ιδανικοί αριθμοί του Κούμμερ, οι υπερμιγαδικοί αριθμοί και τα γεωμετρικά τους ισοδύναμα, οι πολυδιάστατοι χώροι κτλ., η ερμηνεία των οποίων στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών θεωριών γινόταν όλο και πιο πολύπλοκη. Εκτός από αυτό οι ερμηνείες αυτές αποδεικνυόταν ότι δεν είναι μοναδικές. Αυτό έδειχνε ότι οι θεωρίες αυτές πρέπει να εξετάζονται ανεξάρτητα από κάποια συγκεκριμένη ερμηνεία.

Έτσι στη διάρκεια του δεύτερου μισού του 19ου αι. προτείνονται αξιωματικοί ορισμοί μιας σειράς νέων εννοιών. Το 1854 ο Καίλεϋ προτείνει τον αξιωματικό ορισμό της αφηρημένης έννοιας της ομάδας (σε μορφή που είναι ορθή μόνο για πεπερασμένες ομάδες), το 1870 ο Κρόνεκερ προτείνει ένα σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας πεπερασμένων Αβελιανών ομάδων και, εν γένει πολλά έργα μαθηματικών του 19ου αι. –του Χ. Χάνκελ (Hermann Hankel, 1839-1873), του Χ. Βέμπερ (Heinrich Weber, 1842-1913), του Ντέντεκιντ (Richard Dedekind, 1831-1916), και άλλων– είναι αφιερωμένα στην αξιωματικοποίηση τμημάτων της άλγεβρας.

Το 1882 ο Πας (Pasch M.) επιχειρεί την αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας. Στο αξιωματικό σύστημα του Πας εμφανίζονται για πρώτη φορά αξιώματα που χαρακτηρίζουν την έννοια του «μεταξύ», και εισάγεται η αρχή με τη βοήθεια της οποίας μπορεί ένα επίπεδο να διαιρεθεί από μία ευθεία και ο χώρος από ένα επίπεδο. Το 1889 ο Πεάνο (Giuseppe Peano, 1858-1932) στο έργο του για τα λογικά θεμέλια της Γεωμετρίας καταφέρνει να αξιωματικοποιήσει το τμήμα της Γεωμετρίας που μελετά τη σχετική θέση σημείων, ευθειών και επιπέδων. Το σύστημα του Πεάνο θυμίζει αυτό του Πας, όμως ο Πεάνο επιτυγχάνει να αποφύγει συλλογισμούς εποπτικού χαρακτήρα. Στο πλαίσιο της Ιταλικής σχολής, οι μαθητές του Πεάνο, Αμοδέο, Φανό (Gino Fano, 1871-1952), Ενρίκε (Federigo Enriques, 1871-1946) και Πιερί (Mario Pieri, 1860-1913), επιτυγχάνουν τη θεμελίωση της προβολικής Γεωμετρίας.

Παράλληλα γίνονται μελέτες για την αξιωματικοποίηση της αριθμητικής στα έργα του Χ. Γκράσσμαν (Hermann Grassmann, 1809-1877), του Γκ. Κάντορ (Georg Cantor, 1845-1918), του Γκ. Φρέγκε (Gottlob Frege, 1848-1925) και του Μπ. Ράσσελ (Bertrand Russell, 1872-1970). Τα πρώτα πλήρη συστήματα αξιωμάτων της αριθμητικής προτείνονται το 1888 από το Ντέντεκιντ και το 1891 από τον Πεάνο.

Το αξιωματικό σύστημα του Χίλμπερτ

Σε όλες αυτές τις έρευνες που αναφέραμε δεσπόζει η τάση να διαχωριστεί η μαθηματική θεωρία από την ερμηνεία (το μοντέλο) με βάση το οποίο κατασκευάζεται. Η τάση αυτή οδήγησε και στην αξιωματική κατασκευή της Γεωμετρίας στο έργο του Ντ. Χίλμπερτ «Τα θεμέλια των μαθηματικών», το οποίο αντανακλά τη νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου. Πώς όμως εκδηλώνεται αυτή η τάση στο πεδίο της Γεωμετρίας και σε τι συνίσταται η καινοτομία του Χίλμπερτ;

Πριν την ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας, όταν η Γεωμετρία του Ευκλείδη εθεωρείτο ως η μόνη δυνατή Γεωμετρία των σχέσεων του φυσικού χώρου, ήταν νόμιμο να επιχειρήσει κανείς να ορίσει τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, ερμηνεύοντάς τες με βάση τα πραγματικά αρχέτυπα των εννοιών αυτών στο φυσικό χώρο. Αυτή ακριβώς ήταν η προσέγγιση του Ευκλείδη και των μετέπειτα γεωμετρών μέχρι το 19° αι. Ο ίδιος ο Ευκλείδης επιχειρεί να ορίσει π.χ. το σημείο ως «κάτι το οποίο δεν έχει μέρη», δηλαδή ως οντότητα χωρίς εσωτερική δομή ή άτομο. Ο ορισμός αυτός, που επιχειρεί να επεξηγήσει τη μαθηματική έννοια καταφεύγοντας σε αρχέτυπα του φυσικού χώρου, κατανοείται ποικιλοτρόπως από τους σχολιαστές του Ευκλείδη και τους μετέπειτα μαθηματικούς.

Όμως μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών έγινε σαφές ότι η προσέγγιση του Ευκλείδη κατά τον ορισμό των αρχικών εννοιών είναι αδύνατη. Κάθε δυνατή Γεωμετρία έχει τις δικές της αρχικές έννοιες, οι οποίες εξαρτώνται από τα αξιώματα του γεωμετρικού συστήματος. Οι ορισμοί των αρχικών εννοιών έτσι συνδέονται με το δεδομένο γεωμετρικό σύστημα κι όχι πλέον με το φυσικό χώρο.

Αφού λοιπόν δεν είναι δυνατόν να δοθεί ορισμός των αρχικών βασικών εννοιών για όλες τις δυνατές γεωμετρίες, οι αρχικές έννοιες έπρεπε να οριστούν ως αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης που ικανοποιούν τα αξιώματα της Γεωμετρίας. Τα αξιώματα αυτά ορίζουν έμμεσα τις αρχικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό τα αξιώματα παύουν πλέον να θεωρούνται προφανείς αλήθειες που δε χρήζουν απόδειξης. Η έννοια του «προφανούς» αντικαθίσταται τώρα από την έννοια της «απλότητας» του αξιωματικού συστήματος.

Στο σύστημα του Χίλμπερτ τα αρχικά μαθηματικά αντικείμενα είναι τριών ειδών: τα «σημεία», οι «ευθείες» και τα «επίπεδα», που συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις του «ανήκειν», του «μεταξύ» και της «ισοδυναμίας». Το σύστημα του Χίλμπερτ εξετάζει τις αρχικές αυτές έννοιες και τις σχέσεις τους και οι πέντε ομάδες αξιωμάτων που εισάγει συνιστούν έμμεσο ορισμό των αρχικών αντικειμένων και των σχέσεών τους.

(I) Τα *αξιώματα συνδέσεως* (*«ανήκειν»*) ορίζουν τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης μεταξύ σημείων, ευθειών και επιπέδων[1].

(II) Τα *αξιώματα διάταξης* ορίζουν τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης σημείων πάνω σε μια ευθεία ή ένα επίπεδο[2].

(III) Τα *αξιώματα ισοδυναμίας* ορίζουν την έννοια της «ισότητας» δύο τμημάτων ή γωνιών[3].

(IV) Τα *αξιώματα συνέχειας*[4].

(V) Το *αξίωμα παραλληλίας*[5] .

Η έννοια της ερμηνείας (μοντέλου)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα γεωμετρικό σύστημα δίνεται με τη βοήθεια ενός συστήματος αξιωμάτων. Τα αντικείμενα που ικανοποιούν τα αξιώματα αυτού του γεωμετρικού συστήματος μπορεί να είναι διάφορα. Τα διάφορα αυτά αντικείμενα συνιστούν διαφορετικές ερμηνείες ή μοντέλα του γεωμετρικού συστήματος.

---

1. Τα αξιώματα αυτά είναι οκτώ:
   - (I_1) Από οποιαδήποτε δύο σημεία διέρχεται μία μόνο ευθεία.
   - (I_2) Σε κάθε ευθεία υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία.
   - (I_3) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία.
   - (I_4) Από οποιαδήποτε τρία σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία, διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.
   - (I_5) Σε οποιοδήποτε επίπεδο υπάρχει πάντοτε ένα σημείο που ανήκει σ' αυτό.
   - (I_6) Αν δύο σημεία βρίσκονται σε ένα επίπεδο, τότε και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά βρίσκεται σ' αυτό το επίπεδο.
   - (I_7) Αν δύο επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο.
   - (I_8) Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
2. Τα αξιώματα διάταξης είναι τέσσερα:
   - (II_1) Από τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας ένα και μόνον ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.
   - (II_2) Για οποιαδήποτε δύο σημεία A και Γ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο B στην ευθεία $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε το σημείο Γ να βρίσκεται μεταξύ του A και του B.
   - (II_3) Για οποιαδήποτε τρία σημεία μιας ευθείας υπάρχει όχι περισσότερο από ένα σημείο που βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.
     Η σχέση του «μεταξύ» για σημεία σε μια ευθεία μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του *ευθύγραμμου τμήματος*.
   - (II_4) Έστω A, B, Γ τρία σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία και έστω ε ευθεία στο επίπεδο των A, B, Γ που δε διέρχεται από κανένα από τα σημεία A, B, Γ. Αν η ευθεία ε διέρχεται από ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB, τότε πρέπει να διέρχεται κι από ένα σημείο του τμήματος $A\Gamma$ ή από ένα σημείο του τμήματος $B\Gamma$ (αξίωμα του Πας).

Έστω π.χ. ότι ερμηνεύουμε τα αρχικά αντικείμενα ως εξής: ως «σημείο» θεωρούμε οποιαδήποτε σφαίρα ακτίνας *R*, ως «ευθεία» κάθε άπειρο κυκλικό κύλινδρο ακτίνας *R*, και ως «επίπεδο» οποιοδήποτε τμήμα του χώρου που περιέχεται μεταξύ δύο επιπέδων που βρίσκονται σε απόσταση *2R* το ένα από το άλλο. Θα λέμε ότι ένα «σημείο» κείται επ' «ευθείας» αν η αντίστοιχη σφαίρα περιέχεται στον κύλινδρο. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων μπορεί να ορισθεί ως η απόσταση μεταξύ των κέντρων των αντίστοιχων σφαιρών. Με ανάλογο τρόπο μπορούν να οριστούν διάφορα «σχήματα». Τότε όλα τα αξιώματα (και επομένως και τα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας) θα πρέπει να ικανοποιούνται στην ερμηνεία (μοντέλο) αυτή.

Με τον παραπάνω τρόπο κατασκευάσαμε ένα μοντέλο του Ευκλείδειου γεωμετρικού συστήματος. Όλες οι ιδιότητες και τα θεωρήματα που προκύπτουν από το αφηρημένο σύστημα των αξιωμάτων «μεταφέρονται» στα συγκεκριμένα αντικείμενα που είναι ερμηνείες των βασικών εννοιών του αξιωματικού συστήματος. Επομένως, οποιασδήποτε φύσης κι αν είναι τα αντικείμενα αυτά και σε οποιοδήποτε κλάδο της επιστήμης κι αν ανήκουν οι ιδιότητές τους μπορούν να θεωρηθούν γνωστές εκ των προτέρων, επειδή προκύπτουν από τις ιδιότητες του αφηρημένου αξιωματικού συστήματος. Έτσι δεν απαιτείται να μελετηθούν τα αντικείμενα αυτά ξεχωριστά. Αυτό όμως διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της Γεωμετρίας και καθιστά τη σύγχρονη αξιωματική μέθοδο ισχυρότατο επιστημονικό εργαλείο.

Εκτός από τη Γεωμετρία, η μέθοδος του μοντέλου χρησιμοποιείται και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, αλλά και σε άλλους κλάδους της επιστήμης. Στην άλγεβρα π.χ. γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων είναι μοντέλο της αφηρημένης έννοιας της ομάδας. Ένα άλλο μοντέλο της ομάδας είναι το σύνολο των ρητών, το οποίο είναι ταυτόχρονα και μοντέλο της αφηρημένης έννοιας του σώματος.

Η νέα αντίληψη της αξιωματικής μεθόδου που διαμορφώθηκε στα τέλη του 19ου αι. είναι συνυφασμένη με την ιδέα του *μοντέλου* και συνίσταται στο ότι αντικείμενο μιας αξιωματικής θεωρίας αποτελεί οποιοδήποτε μοντέλο (ερμηνεία) της θεωρίας αυτής.

Το πρόβλημα της μη αντιφατικότητας της Γεωμετρίας

Η αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας από τον Χίλμπερτ επέτρεψε στον Φ. Κλάιν και τον Α. Πουανκαρέ να αποδείξουν τη σχετική μη αντιφατικότητα της Γεωμετρίας Λομπατσέφσκι-Μπόλυαϊ ως προς τη Γεωμετρία του Ευκλείδη. Αυτή η απόδειξη, που βασίζεται στην ιδέα του μοντέλου της αξιωματικής θεωρίας, συνίσταται στο να δείξει κανείς έναν τρόπο ερμηνείας

---

3. Τα αξιώματα αυτά είναι πέντε:
   - (III_1) Αν *Α* και *Β* είναι δύο διαφορετικά σημεία στην ευθεία *ε* και *Α'* είναι ένα σημείο της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας *ε'*, τότε μπορεί πάντοτε να βρεθεί σημείο *Β'* που βρίσκεται στο δεδομένο από το σημείο *Α'* μέρος της ευθείας *ε'* τέτοιο, ώστε το τμήμα *ΑΒ* να είναι ισοδύναμο (ίσο) με το τμήμα *Α'Β'*.
   - (III_2) Αν δύο τμήματα είναι ισοδύναμα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.
   - (III_3) Έστω *ΑΒ* και *ΒΓ* δύο τμήματα της ευθείας *ε* που δεν έχουν κοινό σημείο και έστω επίσης *Α'Β'* και *Β'Γ'* δύο τμήματα της ίδιας ευθείας ή άλλης ευθείας *ε'* που επίσης δεν έχουν κοινό σημείο. Αν τώρα $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$, τότε και $A\Gamma = A'\Gamma'$.

     Η γωνία ορίζεται ως το σχήμα που αποτελείται από δύο διαφορετικές ημιευθείες με κοινό αρχικό σημείο.
   - (III_4) Από δεδομένη ημιευθεία σε δεδομένο ημιεπίπεδο που ορίζεται από αυτή την ημιευθεία και την προέκτασή της, μπορεί να σχηματιστεί μια μοναδική γωνία ισοδύναμη με τη δεδομένη γωνία.
   - (III_5) Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν $AB = A_1B_1$, $A\Gamma = A_1\Gamma_1$ και $\angle A = \angle A_1$, τότε και $\angle B = \angle B_1$, $\angle\Gamma = \angle\Gamma_1$.
4. Τα αξιώματα συνέχειας είναι δύο:
   - (IV_1) Έστω *ΑΒ* και *ΓΔ* δύο οποιαδήποτε τμήματα. Τότε στην ευθεία *ΑΒ* υπάρχει πεπερασμένος αριθμός σημείων A_1, A_2, ..., A_n, τέτοιων ώστε τα τμήματα AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, να είναι ισοδύναμα με το τμήμα *ΓΔ* και το σημείο *Β* να βρίσκεται μεταξύ *Α* και A_n *(αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη)*.
   - (IV_2) Τα σημεία μιας ευθείας σχηματίζουν σύστημα, το οποίο, τηρουμένης της γραμμικής διάταξης, του πρώτου αξιώματος ισοδυναμίας και του αξιώματος Ευδόξου-Αρχιμήδη δεν είναι επεκτάσιμο, δηλ. σ' αυτό το σύστημα σημείων δεν είναι δυνατόν να προστεθεί ένα ακόμα σημείο, έτσι ώστε στο επεκτεταμένο σύστημα που αποτελείται από το αρχικό σύστημα και το συμπληρωματικό σημείο να ικανοποιούνται τα παραπάνω αξιώματα (*αξίωμα γραμμικής πληρότητας*).
5. Έστω *ε* τυχούσα ευθεία και σημείο *Α* εκτός αυτής. Στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία *ε* και το σημείο *Α* υπάρχει όχι περισσότερο από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο *Α* και δεν τέμνει την ευθεία *ε*.

των εννοιών και προτάσεων της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με όρους της Ευκλείδειας (στην περίπτωση της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας η μέθοδος απέδειξε ότι αν η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι μη αντιφατική, τότε και η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι επίσης μη αντιφατική).

Όσον αφορά τη μη αντιφατικότητα της ίδιας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αυτή ανάγεται στη μη αντιφατικότητα της αριθμητικής των φυσικών αριθμών. Ωστόσο, δεν υπάρχει απόλυτη απόδειξη της μη αντιφατικότητας της αριθμητικής (αν και υπάρχουν αποδείξεις μη αντιφατικότητας υποσυστημάτων της αριθμητικής). Έτσι δεχόμαστε ότι μια αξιωματική θεωρία είναι μη αντιφατική αν μπορεί να κατασκευαστεί αριθμητικό μοντέλο της θεωρίας αυτής. Τα παραπάνω αποκαλύπτουν τον ιδιαίτερο ρόλο της αριθμητικής στο πρόβλημα της μη αντιφατικότητας, δεδομένου ότι το ανάλογο πρόβλημα για μια σειρά άλλες μαθηματικές θεωρίες ανάγεται επίσης στο πρόβλημα της μη αντιφατικότητας της αριθμητικής. Η μέθοδος της απόδειξης της σχετικής μη αντιφατικότητας μιας θεωρίας με τη βοήθεια της κατασκευής ενός μοντέλου εφαρμόζεται σήμερα ευρύτατα στα θεμέλια των μαθηματικών και τη μαθηματική λογική για την απόδειξη της σχετικής μη αντιφατικότητας διάφορων μαθηματικών και λογικών θεωριών.

Το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της Γεωμετρίας

Η μέθοδος του μοντέλου μας επιτρέπει επίσης να λύσουμε το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων. Προκειμένου να αποδειχθεί ότι ένα αξίωμα A της θεωρίας T δεν είναι αποδείξιμο από τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας αυτής, αρκεί να κατασκευαστεί ένα μοντέλο της θεωρίας T, στο οποίο το αξίωμα A είναι ψευδές, ενώ τα υπόλοιπα αξιώματα είναι αληθή.

Η ύπαρξη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύει την ανεξαρτησία του αξιώματος παραλληλίας από τα υπόλοιπα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Το σύστημα αξιωμάτων της Υπερβολικής Γεωμετρίας είναι ένα σύστημα που λαμβάνεται από το παραπάνω αξιωματικό σύστημα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη με την αλλαγή του αξιώματος παραλληλίας με το παρακάτω αξίωμα:

> «Έστω ε τυχούσα ευθεία και σημείο A εκτός αυτής. Στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο A άγονται περισσότερες από μία ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και δεν τέμνουν την ευθεία ε».

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί η ανεξαρτησία των αξιωμάτων συνέχειας. Η ανεξαρτησία του αξιώματος Ευδόξου-Αρχιμήδη αποδεικνύεται με τη βοήθεια της κατασκευής ενός μοντέλου «μη Αρχιμήδειας Γεωμετρίας».

Ιδιαίτερο ρόλο έχει το αξίωμα (I_7), το οποίο στην ουσία εξασφαλίζει ότι ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις. Η ανεξαρτησία αυτού του αξιώματος από τα υπόλοιπα αποδεικνύεται, π.χ. με την κατασκευή ενός μοντέλου τετραδιάστατου Ευκλείδειου χώρου.

Έτσι το πρόβλημα της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας οδηγεί στη μελέτη νέων «γεωμετρικών χώρων», που διαφέρουν σημαντικά ως προς τις ιδιότητές τους από το συνήθη χώρο του Ευκλείδη.