ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας

Τον 5ο αι. διατυπώθηκαν στην αρχαία Ελλάδα τρία προβλήματα που έμελλε να γίνουν πασίγνωστα. Πρόκειται για το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, της τριχοτόμησης γωνίας και του τετραγωνισμού του κύκλου. Η ιστορία των προβλημάτων αυτών είναι πολύ μεγάλη. Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι τα δύο πρώτα λύθηκαν στις αρχές μόνον του περασμένου αιώνα, ενώ το τρίτο στα τέλη του. Αποδείχθηκε ότι και τα τρία προβλήματα δεν είναι επιλύσιμα με τα μέσα που ορίζονται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, δηλαδή με κανόνα και διαβήτη. Η ιστορική σημασία αυτών των προβλημάτων συνίσταται στο ότι ήταν οι πρώτες αποδείξεις μη επιλυσιμότητας στα μαθηματικά. Αποδείχθηκε ότι ορισμένες κατασκευές ήταν αδύνατον να πραγματοποιηθούν με ορισμένα μέσα (τον κανόνα και το διαβήτη).

Ο διπλασιασμός του κύβου. Αν συμβολίσουμε με α την ακμή ενός κύβου, τότε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου συνίσταται στο να βρεθεί η ακμή κύβου που να έχει όγκο διπλάσιο από το δεδομένο κύβο, δηλαδή ζητείται να βρεθεί το μέγεθος x, για το οποίο να ισχύει $x^3 = 2α^3$. Η προέλευση του προβλήματος δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Σύμφωνα με έναν θρύλο που αναφέρει ο Πλούταρχος, το πρόβλημα ετέθη σε ένα χρησμό που απαιτούσε από τους κατοίκους της Δήλου να διπλασιάσουν το βωμό του Απόλλωνα προκειμένου να σταματήσει η επιδημία που είχε εξαπλωθεί στο νησί. Γι' αυτό ονομάζεται και *Δήλιο πρόβλημα*. Ο πρώτος που το μελέτησε ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος, που το ανήγαγε στην εύρεση δύο μέσων αναλόγων σε συνεχή αναλογία μεταξύ δύο δοσμένων μεγεθών, δηλαδή στην εύρεση δύο μεγεθών x, y, τέτοιων, ώστε $\frac{α}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2α}$.

Αργότερα, ο Αρχύτας ο Ταραντίνος έδειξε ότι το μέγεθος x μπορεί να βρεθεί ως τομή, ενός κώνου, ενός κυλίνδρου και της επιφάνειας που λαμβάνεται από την περιστροφή μιας περιφέρειας περί την εφαπτομένη της, δηλ. της επιφάνειας «κρίκου» (torus) μηδενικού ανοίγματος. Η λύση του Αρχύτα αποδείκνυε την ύπαρξη δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δύο οιωνδήποτε μεγεθών, ωστόσο η μέθοδός του ξέφευγε από τα καθιερωμένα μέσα του κανόνα και του διαβήτη.

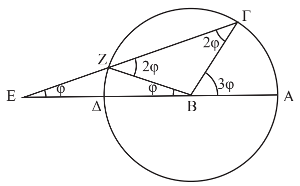
Οι μεταγενέστερες αναζητήσεις στράφηκαν στην εύρεση εναλλακτικών τρόπων κατασκευής των μέσων αναλόγων των δύο δεδομένων μεγεθών που απαιτούνται από την αναλογία του Ιπποκράτη:

$$αy = x^2 \text{ και } xy = α(2α) \text{ ή } y^2 = (2α)x$$

Η κατασκευή των συντεταγμένων του σημείου τομής των δύο αυτών γεωμετρικών τόπων δίνει τη λύση του προβλήματος. Όμως η μελέτη τέτοιων τόπων δεν ήταν απλό πράγμα στην αρχαιότητα. Πρώτα απ' όλα έπρεπε να αποδειχθεί ότι οι τόποι αυτοί ήταν συνεχείς καμπύλες, προκειμένου να μιλήσουμε για σημείο τομής. Μόνον ο Μέναιχμος (δεύτερο ήμισυ του 4ου αι.) μπόρεσε να παραστήσει τους τόπους αυτούς ως επίπεδες τομές κώνων εκ περιστροφής. Είναι πιθανό ο στερεομετρικός αυτός προσδιορισμός του σημείου τομής, όπως και στην περίπτωση του Αρχύτα, να έπαιζε ρόλο απόδειξης της ύπαρξης και της συνέχειας των υπό μελέτη γεωμετρικών τόπων. Οι αρχαίοι Έλληνες αντιμετώπισαν το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου από διάφορες σκοπιές. Ο Ευτόκιος αναφέρει περί τις 12 προτεινόμενες λύσεις. Από τις λύσεις αυτές ορισμένες είναι μηχανικές, όπως π.χ. του Ερατοσθένη (3ος αι. π.Χ.) που πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός μηχανικού οργάνου, του «μεσολάβου», ή η λύση που αποδίδεται στον Πλάτωνα. Άλλες πάλι γίνονται με την εισαγωγή νέων καμπυλών, όπως οι λύσεις του Διοκλή και του Νικομήδη, που πραγματοποιούνται με τη βοήθεια των φερώνυμων καμπυλών. Πάντως μέχρι την εποχή του Ευκλείδη (τέλη του 4ου αι.) πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με κανόνα και διαβήτη. Η πρώτη προσπάθεια να αποδειχθεί η μη επιλυσιμότητα της ειδικής περίπτωσης κυβικής εξίσωσης $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, με τη βοήθεια των τετραγωνικών αρρήτων του Βιβλίου X των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, έγινε από το Λεονάρδο της Πίζας. Μετά από αυτόν πέρασαν τετρακόσια περίπου χρόνια μέχρι που ο Ντεκάρτ να διατυπώσει το γενικό κριτήριο επιλυσιμότητας μιας κυβικής εξίσωσης: οι ρίζες μιας κυβικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές μπορούν να κατασκευασθούν με κανόνα και διαβήτη, όταν η εξίσωση είναι αναγώγιμη, δηλαδή έχει τουλάχιστον μία ρητή ρίζα (ο Ντεκάρτ υπέθετε ότι όλες οι ρίζες είναι πραγματικές). Το 1637 διατύπωσε την υπόθεση ότι η κατασκευή τμήματος ίσου με $\sqrt[3]{2}$, δηλαδή της λύσης της εξίσωσης $x^3 = 2\alpha^3$ για $\alpha = 1$, δεν είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη. Όμως τη μη επιλυσιμότητα του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη απέδειξε το 1837 ο Π. Βάντσελ (Pierre Laurent Wantzell, 1814-1848).

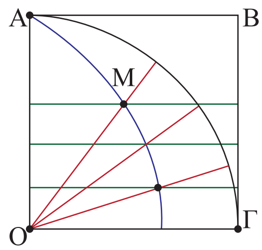
Η τριχοτόμηση γωνίας. Στο πρόβλημα αυτό ζητείται να διαιρεθεί μια γωνία σε τρία ίσα μέρη. Συνυφασμένες με τη λύση του προβλήματος αυτού είναι η εφαρμογή από τον Αρχιμήδη της μεθόδου της *νεύσης* και η εισαγωγή μιας νέας καμπύλης, της *τετραγωνίζουσας*. Η μέθοδος της νεύσης συνίσταται στην τοποθέτηση ενός ευθύγραμμου τμήματος ορισμένου μήκους μεταξύ δύο δεδομένων γραμμών έτσι, ώστε τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος να βρίσκονται πάνω στις γραμμές και το ίδιο το τμήμα ή η προέκτασή του να διέρχεται από δεδομένο σημείο.

Οι δεδομένες γραμμές που εξέταζαν οι αρχαίοι γεωμέτρες ήταν συνήθως η ευθεία και η περιφέρεια. Ωστόσο, αν ένα πρόβλημα λύνεται με τη μέθοδο της νεύσης, τότε η φύση του προβλήματος παραμένει ασαφής. Αν το ευθύγραμμο τμήμα κινείται έτσι ώστε το ένα άκρο του να βρίσκεται στη μία από τις δεδομένες γραμμές, ενώ η προέκτασή του διέρχεται από το δεδομένο σημείο, τότε το δεύτερο άκρο θα γράψει καμπύλη (Κ). Η εφαρμογή της μεθόδου της νεύσης ισοδυναμεί με την εύρεση του σημείου τομής της καμπύλης (Κ) με τη δεύτερη δεδομένη γραμμή. Όμως η μέθοδος της νεύσης δεν δίνει καμιά πληροφορία για τη φύση της καμπύλης (Κ), η οποία μπορεί να είναι απλή, ή αρκετά πολύπλοκη. Ίσως για το λόγο αυτό οι αρχαίοι γεωμέτρες απέφευγαν τη μέθοδο αυτή.



Σχήμα 1

Η τριχοτόμηση γωνίας με τη μέθοδο της *νεύσης* γίνεται ως εξής: Έστω η γωνία $A\hat{B}\Gamma = 3\varphi$ (σχ.1) που πρέπει να διαιρεθεί σε τρία ίσα μέρη. Γράφουμε κύκλο κέντρου Β, και προεκτείνουμε την ΑΒ προς την άλλη μεριά από το κέντρο Β. Μεταξύ της ευθείας ΒΕ και του κύκλου τοποθετούμε το τμήμα ΕΖ μήκους R, έτσι ώστε η προέκτασή του να διέρχεται από το σημείο Γ (το σημείο τομής της πλευράς ΒΓ με τον κύκλο). Τότε $Z\hat{E}\Delta = 1/3\ \Gamma\hat{B}A$.

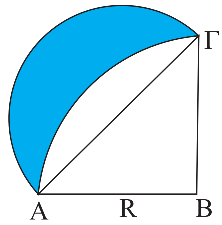


Σχήμα 2

Τον 5ο αι. π.Χ. ο Ιππίας ο Ηλείος εισήγαγε με κινηματικό ορισμό μία νέα καμπύλη, την οποία ο Λάιμπνιτς ονόμασε αργότερα *τετραγωνίζουσα*. Έστω ότι τα τμήματα ΟΑ και ΑΒ (Σχ. 2) αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα, ώστε το ΟΑ να περιστρέφεται περί το Ο ομοιόμορφα κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου και το ΑΒ να κατέρχεται ομοιόμορφα παραμένοντας παράλληλο προς τον εαυτό του, μέχρις ότου τα δύο τμήματα να καταλήξουν στη θέση ΟΓ ταυτόχρονα. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής Μ των δύο τμημάτων γράφει την τετραγωνίζουσα. Από τον ορισμό της καμπύλης προκύπτει άμεσα ότι οι τεταγμένες της καμπύλης είναι ανάλογες των αντίστοιχων γωνιών $y:y_1 = \varphi:\varphi_1$. Με τη βοήθεια της ίδιας καμπύλης μπορεί να λυθεί και το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Τον 10ο αι. ο Θαμπίτ Ιμπν Κούρρα στην πραγματεία του «Διαίρεση της ορθής γωνίας σε τρία ίσα μέρη», ακολουθώντας την παράδοση του Αρχιμήδη, ανάγει το πρόβλημα σε κατασκευή με τη βοήθεια της νεύσης. Στη μεσαιωνική Αραβική γραμματεία επιχειρείται η σύνδεση του προβλήματος της τριχοτόμησης γωνίας με την άλγεβρα και την τριγωνομετρία. Το 15ο αι. ο αλ-Κασί στην απολεσθείσα «Πραγματεία περί χορδής και ημίτονου» προτείνει μια πρωτότυπη αναδρομική μέθοδο για τη λύση της εξίσωσης της τριχοτόμησης γωνίας, δηλ. της κυβικής εξίσωσης της μορφής $x^3 + q = px$, όπου $x = \eta\mu\varphi$, $p = 3/4$, $q = (1/4)\eta\mu 3\varphi$. Η μέθοδος του αλ-Κασί μας είναι γνωστή από την «Πραγματεία» του αλ-Ρουμί (14ος-15ος αι.) και τα σχόλια του Μιρίτ Τσελεμπί στους αστρονομικούς πίνακες του Ούλουγκμπεκ.

Στα τέλη του 16ου αι. ο Φ. Βιέτ στο «Συμπλήρωμα της Γεωμετρίας» απέδειξε ότι η λύση οποιασδήποτε κυβικής εξίσωσης οδηγεί είτε σε νεύση είτε σε τριχοτόμηση γωνίας, και με τη βοήθεια τριγωνομετρικών μέσων βρήκε τη λύση της κυβικής εξίσωσης στη λεγόμενη «μη αναγώγιμη» περίπτωση (ο όρος αυτός εισήχθηκε από τον Καρντάνο για να υποδηλώσει την περίπτωση που η κυβική εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις που εμφανίζονται ως άθροισμα ή διαφορά των αριθμών που σήμερα ονομάζουμε μιγαδικούς). Ο Βιέτ γνώριζε επίσης τις αλγεβρικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στη διαίρεση γωνίας όχι μόνο σε τρία, αλλά και σε πέντε ή επτά ίσα μέρη. Πρώτος ο Ντεκάρτ το 1637 εξέφρασε τη γνώμη ότι ο κανόνας και ο διαβήτης είναι ανεπαρκή για τη λύση του προβλήματος αυτού στη γενική περίπτωση. Όμως ολοκληρωμένη απόδειξη της υπόθεσης του Ντεκάρτ δόθηκε μόνον το 1837 από τον Π. Βάντσελ.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου. Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου συνίσταται στην κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με δεδομένο κύκλο. Αν το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και της τριχοτόμησης γωνίας ανάγεται σε πρόβλημα λύσης κυβικής εξίσωσης, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ανάγεται στην κατασκευή ενός τμήματος ίσου με π. Ο Ιπποκράτης ο Χίος προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα αυτό με τον τετραγωνισμό μηνίσκων. Ο Ιπποκράτης βρήκε τρία είδη τέτοιων μηνίσκων. Ένας από αυτούς είναι ο μηνίσκος που περικλείεται από το τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{\mathrm{B}\mathrm{A}\Gamma}$ και του ημικυκλίου με διάμετρο τη χορδή ΑΓ (σχ.3). Το εμβαδόν του μηνίσκου αυτού είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Η ιστορία των μηνίσκων είναι αρκετά μεγάλη. Το 1840 ο Κλάουζεν βρήκε άλλους δύο μηνίσκους, αλλά το 1930-40 οι Ρώσοι μαθηματικοί Ν.Γ. Τσεμποταριόφ και ο Α.Β. Ντοροντνόφ, χρησιμοποιώντας μεθόδους της θεωρίας Γκαλουά, απέδειξαν ότι υπάρχουν πέντε είδη μηνίσκων αλλά κανένας δεν τετραγωνίζει τον κύκλο.



Σχήμα 3

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι συνυφασμένος με την αριθμητική φύση του αριθμού π. Βασιζόμενος στη θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου και κάνοντας χρήση της μεθόδου της εξάντλησης ο Αρχιμήδης στο έργο του «Κύκλου μέτρηση» αποδεικνύει ότι το εμβαδόν κύκλου είναι ισοδύναμο με το εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου, η μία κάθετος του οποίου είναι η ακτίνα της περιφέρειας και η άλλη το μήκος της περιφέρειας. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να αναχθεί το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου στην εύρεση του μήκους της περιφέρειας. Στα τέλη του 18ου αι. ο Ι. Λάμπερτ και ο Α. Λεζάντρ απέδειξαν ότι ο π είναι άρρητος. Μόλις το 1882 ο Λίντεμαν (K.L.F. von Lindemann) και ο Σ. Ερμίτ (Charles Hermite, 1822-1901) απέδειξαν ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός, δηλ. δεν ικανοποιεί καμιά αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου δεν μπορεί να αναχθεί σε αλγεβρική εξίσωση. Το θεώρημα του Λίντεμαν αποδεικνύει τη μη επιλυσιμότητα του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.