ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. *Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1L) με ίσες πλευρές α. Στο ημιεπίπεδο ακμής ΒΓ που δεν περιέχει το Α θεωρούμε το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με ΒΕ = α. Έστω Ζ, Η οι προβολές των Β, Δ αντίστοιχα στην ΕΓ. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε εποπτικά τη σχέση των τμημάτων ΓΗ, ΗΖ και ΖΕ και στη συνέχεια να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.*

2. *Με κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή προσδιορίστε την "ακριβή" θέση των αριθμών $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.*

ΕΡΓΑΣΙΑ (Ριζικός άξονας δύο κύκλων)

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) όταν:

i) *Οι κύκλοι τέμνονται (**Υπόδειξη**: φέρτε την κοινή χορδή τους),*

ii) *Οι κύκλοι εφάπτονται (**Υπόδειξη**: φέρτε την κοινή εφαπτομένη),*

iii) *Οι κύκλοι είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου (**Υπόδειξη**: χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 2 της §9.6).*

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο

Η προέλευση του προβλήματος της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε δύο μέρη, έτσι, ώστε το μεγαλύτερο τμήμα του να είναι μέση ανάλογος ανάμεσα σε ολόκληρο το τμήμα και το μικρότερο τμήμα του, δηλαδή $α{:}x = x{:}(α - x)$, δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Ορισμένοι ιστορικοί ανάγουν την προέλευσή του στην Πυθαγόρεια σχολή, συνδέοντάς το με τη μελέτη της τετραγωνικής εξίσωσης $x^2 + αx = α^2$, όπως εμφανίζεται σε γεωμετρική γλώσσα στο Βιβλίο ΙΙ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη ή με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας στην αρχαία Ελλάδα, και άλλοι με την κατασκευή του πενταγώνου από το Θεαίτητο περί το 386 π.Χ.

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στα εξής Βιβλία:

1. στο Βιβλίο ΙΙ (Προτάσεις 5, 6 και 11), που συνδέεται με την «παραβολή χωρίων» και κατά συνέπεια με την εξίσωση $x^2 + αx = α^2$,
2. στο Βιβλίο IV (Προτάσεις 10-11), κατά την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου,
3. στο Βιβλίο VI (Ορισμός 3 και Προτάσεις 29-30), όπου ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί έννοιες από τη γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου που εκτίθεται στο Βιβλίο V (βλ. *Μέτρηση*).
4. στο Βιβλίο XIII (Προτάσεις 16 και 17), κατά την κατασκευή του κανονικού εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου, στην οποία ενέχεται το πεντάγωνο.

Μετά τον Ευκλείδη το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο εμφανίζεται στο αποκαλούμενο «Συμπλήρωμα» ή Βιβλίο XIV των «Στοιχείων», που αποδίδεται στον Υψικλή (2ος αι. π.Χ.). Στο έργο του Ήρωνα εμφανίζεται σε σχέση με τον προσδιορισμό της επιφάνειας του πενταγώνου και του δεκαγώνου, και στη «Συναγωγή» του Πάππου στην κατασκευή του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου, καθώς και στα θεωρήματα σύγκρισης των όγκων τους.

Στην Αραβική παράδοση δεν υπάρχουν ενδείξεις εισαγωγής της έννοιας της διαίρεσης ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, αν και στο έργο του αλ-Χουαρίζμι (περίπου 780-850), του Αμπού Καμίλ (περίπου 850-930), του Αμπούλ-Ουάφα (940-997/8) κ.ά. εξετάζονται συναφή προβλήματα.

Στην Ευρωπαϊκή παράδοση οι απαρχές της μελέτης των ιδιοτήτων της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο ανάγονται στον Λεονάρδο της Πίζας ή Φιμπονάτσι (περίπου 1180-1250), που εξετάζει μετρικά προβλήματα του πενταγώνου και του δεκαγώνου, καθώς και προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου. Ο Φιμπονάτσι είναι περισσότερο γνωστός από το «πρόβλημα των κουνελιών», που εκτίθεται στο «Βιβλίο του άβακα» (*Liber abaci*):

«Πόσα ζεύγη κουνελιών μπορούν να γεννηθούν μέσα σε ένα χρόνο από ένα ζευγάρι κουνέλια; ... όταν η φύση των κουνελιών είναι τέτοια που κάθε μήνα γεννούν ένα άλλο ζευγάρι και αρχίζουν την αναπαραγωγή το δεύτερο μήνα μετά τη γέννησή τους».

Ο Φιμπονάτσι δείχνει ότι το πρόβλημα αυτό οδηγεί στη γένεση της ακολουθίας

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

που ονομάστηκε ακολουθία (αριθμοί) του Φιμπονάτσι από τον Φ.Ε.Α. Λούκας (François Edouard Anatole Lucas, 1848-1891) και σχηματίζεται σύμφωνα με τον κανόνα:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1,$$
$$u_\nu = u_{\nu-1} + u_{\nu-2}$$

Η σχέση της ακολουθίας αυτής με το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο είναι ότι το όριο του λόγου του επόμενου προς τον προηγούμενο όρο της ακολουθίας ισούται με την τιμή του μέσου και άκρου λόγου, δηλαδή με τη ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x = \alpha^2$, και είναι άρρητος αριθμός. Δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Φιμπονάτσι γνώριζε τη σχέση αυτή, η οποία απαντάται αργότερα σε μαθηματικούς του 16ου-17ου αι. (Κέπλερ, Ζιράρ, Σίμπσον). Η γενική μορφή του ν-οστού όρου της ακολουθίας Φιμπονάτσι

$$u_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu+1}\right]$$

δημοσιεύτηκε το 1843 από τον Ζ. Μπινέ.

Το 13ο αι. ο μεταφραστής και σχολιαστής του Ευκλείδη Καμπανός της Νοβάρα προσθέτει στο Βιβλίο XIII των «Στοιχείων» (1482) μία πρόταση που περιέχει μια αριθμητική απόδειξη της ασυμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος και των δύο μερών του που λαμβάνονται από τη διαίρεσή του σε μέσο και άκρο λόγο.

Το 15ο-16ο αι. αναζωογονείται το ενδιαφέρον προς τη διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο σε σχέση με τις εφαρμογές της στη Γεωμετρία και την αρχιτεκτονική. Στο πλαίσιο αυτό εισάγεται ο όρος «χρυσή τομή» από τον Λεονάρντο ντα Βίντσι. Το 1509 εκδίδεται «Η θεϊκή αναλογία» (*Divina proportione*) του Λουκά Πατσόλι (L. Pacioli, 1445-περ. 1514), που αν και είναι ειδικά αφιερωμένη στο πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο, η μαθηματική διαπραγμάτευση του θέματος είναι μάλλον αδύνατη.