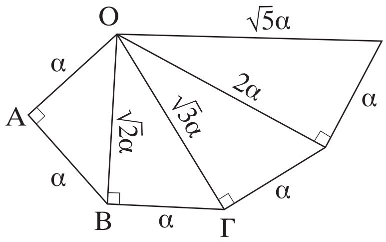
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν α είναι γνωστό τμήμα, να κατασκευασθεί τμήμα ίσο με $\sqrt{2}\alpha, \sqrt{3}\alpha, \sqrt{5}\alpha, \ldots, \sqrt{\nu}\alpha$ με ν φυσικό μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

Λύση

Αν $x = \sqrt{2}\alpha$, τότε $x^2 = 2\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2$, η οποία σημαίνει ότι το x μπορεί να κατασκευασθεί (σχ.9) ως υποτείνουσα ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με α. Έτσι το ΟΒ είναι το ζητούμενο τμήμα.



Σχήμα 9

Αν $y = \sqrt{3}\alpha$, τότε $y^2 = 3\alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha^2 = \alpha^2 + x^2$ που σημαίνει ότι το y είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και x. Αν λοιπόν φέρουμε κάθετο στην ΟΒ στο Β και πάνω σε αυτή πάρουμε σημείο Γ, ώστε ΒΓ = α, τότε $ΟΓ = \sqrt{3}\alpha$, δηλαδή y = ΟΓ. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε διαδοχικά τα τμήματα $\sqrt{2}\alpha, \sqrt{3}\alpha, \sqrt{5}\alpha, \ldots, \sqrt{\nu}\alpha$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

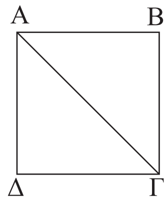
Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οιωνδήποτε (φυσικών ή γεωμετρικών) μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και στο ΓΔ.

Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθησή τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές.

Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ. στη γεωμετρία, στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου, ή κατά τη μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στη θεωρία της μουσικής, στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου, που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί «αν υποτεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό». Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:



Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σύμμετρη προς τη διαγώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακεραίων αριθμών, δηλαδή $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\alpha}{\beta}$, όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2 = 2ΑΒ^2$. Επομένως, $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{2}$, ή $\beta^2 = 2\alpha^2$.

Αυτό σημαίνει ότι ο β^2 είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος (δηλαδή της μορφής

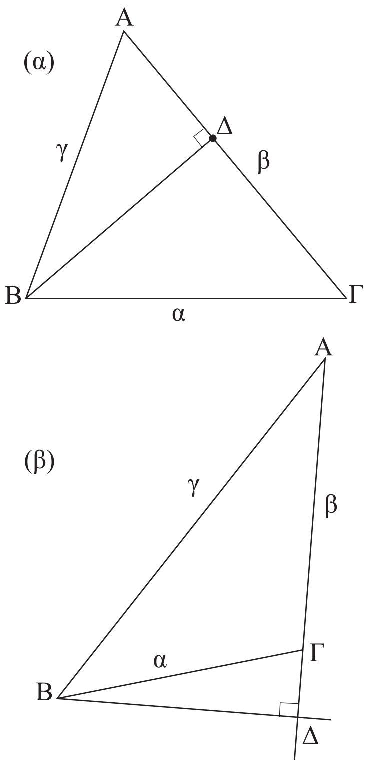
$\beta = 2\lambda$). Τότε ο α πρέπει να είναι περιττός (αφού οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι). Όμως τότε $(2\lambda)^2 = 2\alpha^2$, ή $4\lambda^2 = 2\alpha^2$, ή $2\lambda^2 = \alpha^2$ κι επομένως ο α^2 είναι άρτιος, οπότε και ο α είναι άρτιος, που είναι άτοπο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιττού (δηλαδή τη θεωρία διαιρετότητας δια 2) που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.

Γρήγορα βρέθηκαν και άλλα ασύμμετρα τμήματα. Ειδικότερα, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (τέλη του 5ου αι. π.Χ.) ανακάλυψε ότι οι πλευρές των τετραγώνων με εμβαδόν 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15 είναι ασύμμετρες με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές τη μονάδα. Επίσης, ο Θεαίτητος απέδειξε ότι αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό Ν που δεν είναι τετράγωνος, τότε η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα. Με σύγχρονη ορολογία, αν $N \neq \alpha^2$, τότε ο $\sqrt{N}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και απέδειξε ότι και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\sqrt[3]{N}$, όπου Ν φυσικός αριθμός δεν είναι τέλειοι κύβοι. Επίσης εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{M+N}$, $\sqrt{M}+\sqrt{N}$, $\sqrt{\sqrt{M}+\sqrt{N}}$.

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή γωνία, ως προς τις δύο άλλες πλευρές. Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι σε οξεία ή αμβλεία γωνία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των άλλων πλευρών; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνουν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.



Σχήμα 10

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1\text{L}$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ και } \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2.$$

Επειδή είναι $\hat{A} < 1\text{L}$ τα Δ, Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα: