ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Μέτρηση

Στα πρώτα στάδια ανάπτυξης της κοινωνίας η μέτρηση γινόταν «με το μάτι», αφού το μέτρο δεν είχε διακριθεί ως ανεξάρτητη ιδιότητα ενός αντικειμένου. Στην πορεία ανάπτυξης της κοινωνίας, όταν τέτοιου είδους «ποιοτικά» μέτρα κρίθηκαν ανεπαρκή, εμφανίσθηκαν κάποια φυσικά μέτρα, που ήταν συνήθως μέρη του ανθρώπινου σώματος, όπως το μήκος του ποδιού, το πλάτος της παλάμης κ.ά. Για την ύπαρξη τέτοιων μέτρων μαρτυρούν και οι ονομασίες των μέτρων μήκους που διατηρήθηκαν μέχρι σήμερα, όπως «πόδι», «δάκτυλος», «παλάμη» κ.ά. Τα μέτρα αυτά χρησιμοποιούνταν αρχικά για τον προσδιορισμό της ισότητας των μετρούμενων μεγεθών ή της ισοδυναμίας των σχημάτων. Το μέτρο ενός μεγέθους A ήταν το πλησιέστερο ακέραιο πολλαπλάσιο της μονάδας E.

Η ανάγκη για πιο ακριβείς μετρήσεις οδήγησε στη χρήση υποδιαιρέσεων της μονάδας μέτρου. Έτσι εμφανίστηκαν τα πρώτα «συγκεκριμένα κλάσματα», ως μέρη των συγκεκριμένων μέτρων από όπου προήλθαν. Η ιστορική διαδικασία γένεσης των συγκεκριμένων κλασμάτων ως αποτέλεσμα της ανάγκης μέτρησης επιβεβαιώνεται από την ανομοιομορφία του συμβολισμού των κλασμάτων αυτού του τύπου. Στη Βαβυλώνα τα σύμβολα για το 1/2, το 1/3 και το 2/3 είναι ταυτόχρονα και σύμβολα δοχείων, δηλαδή συγκεκριμένων μέτρων όγκου. Στην αρχαία Αίγυπτο διακρίνονται τα *φυσικά κλάσματα* (1/2, 1/3, 1/4 και 2/3), που διαμορφώθηκαν από άμεσες πρακτικές ανάγκες και έχουν ιδιάζουσα ονοματολογία και ιερογλυφικό συμβολισμό, και τα *αλγοριθμικά κλάσματα*, που ήταν της μορφής 1/ν, και εμφανίσθηκαν ως προϊόν μαθηματικής επεξεργασίας.

Η ανεξαρτητοποίηση του κλάσματος από το συνυφασμένο πεδίο μεγεθών ήταν πολύ πιο αργή από τη διαμόρφωση της έννοιας του φυσικού αριθμού. Δεν έγινε γρήγορα αντιληπτό ότι οι αριθμητικές ιδιότητες των κλασμάτων δεν εξαρτώνται από τις ιδιότητες του πεδίου μεγεθών, στο οποίο ανήκουν.

Η πρώτη Ελληνική θεωρία μέτρησης. Μία από τις σημαντικές διαφορές της Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης από την Αιγυπτιακή και τη Βαβυλωνιακή είναι ότι τα προβλήματα της μέτρησης συνεχών μεγεθών τίθενται σε νέα θεωρητική βάση. Οι μαθηματικοί αρχίζουν να αναζητούν μεθόδους μέτρησης με βάση κάποια αφηρημένη μονάδα μέτρου μήκους, επιφανείας ή όγκου. Και εδώ δεν εννοούμε εμπειρικές μεθόδους (προσεγγιστικού) προσδιορισμού του μέτρου που να ικανοποιούν πρακτικές ανάγκες. Απαιτείται η απόδειξη της ύπαρξης ενός τέτοιου μέτρου. Η νέα αυτή προσέγγιση απαιτούσε την εισαγωγή νέων θεωρητικών εννοιών και νέων τρόπων συλλογισμού. Κάθε συγκεκριμένο είδος μεγεθών είναι συνυφασμένο με ορισμένο τρόπο σύγκρισης των φυσικών αντικειμένων ή σωμάτων. Τα ευθύγραμμα τμήματα, π.χ. μπορούν να συγκριθούν με τη βοήθεια της έννοιας της «εφαρμογής» του ενός επί του άλλου, η οποία οδηγεί στην έννοια του μήκους: δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος αν με τη μεταφορά του ενός επί του άλλου «εφαρμόζουν», ενώ το ένα υπολείπεται του άλλου τότε το πρώτο είναι μικρότερο του δεύτερου. Τα βάρη είναι μεγέθη άλλου είδους. Δεν έχει νόημα το ερώτημα αν το βάρος του σώματος είναι μεγαλύτερο, ίσο, ή μικρότερο από το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Έτσι, τα μήκη, τα εμβαδά, οι όγκοι, είναι διαφορετικά είδη μεγεθών. Το πρόβλημα της μέτρησης ενός μεγέθους A με τη βοήθεια της μονάδας E συνίσταται αρχικά, στην αρχαία Ελλάδα στο να βρεθεί πόσες φορές περιέχεται η μονάδα στο A, δηλαδή ζητείται ο αριθμός α τέτοιος, ώστε $A = \alpha E$, όπου A και E είναι μεγέθη του αυτού είδους. Ένα μέγεθος Χ είναι κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, όταν περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών στα μεγέθη αυτά, δηλ. $\text{A} = \alpha\text{X}$, $\text{B} = \beta\text{X}$. Τότε τα μεγέθη λέγονται *σύμμετρα*.

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες είχαν βρει μια αποτελεσματική διαδικασία με την οποία μπορούσαν να βρουν το κοινό μέτρο δύο μεγεθών Α και Β, αν υπάρχει. Πρόκειται για τη διαδικασία της *ανθυφαίρεσης* ή *ανταναίρεσης* (γνωστής σήμερα ως *αλγόριθμος του Ευκλείδη*), η οποία εκτίθεται στις δύο πρώτες προτάσεις του Βιβλίου VII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Αν υποθέσουμε ότι $\text{A} > \text{B}$, τότε αφαιρούμε το Β από το Α όσες φορές γίνεται. Αν δεν περισσεύει υπόλοιπο, τότε το Β μετρά ακριβώς το Α και είναι το κοινό μέτρο. Ειδεμή έχουμε υπόλοιπο B_1, με $\text{B} > \text{B}_1$. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στα B, B_1. Αν δεν προκύπτει υπόλοιπο, το B_1 είναι το κοινό μέτρο, ειδεμή έχουμε ένα νέο υπόλοιπο B_2. Αν η επανάληψη αυτής της διαδικασίας τερματιστεί σε κάποιο $B_ν$ που μετρά ακριβώς το $A_ν$ τότε το $B_ν$ είναι το ζητούμενο κοινό μέτρο. Αν ο αλγόριθμος δεν τερματίζεται τα δύο μεγέθη είναι *ασύμμετρα*. Πιθανότατα στο Θεαίτητο να ανήκει η ιδέα να εφαρμοστεί η ανθυφαίρεση ως κριτήριο ασυμμετρίας δύο τμημάτων. Το κριτήριο αυτό αποδεικνύεται στην Πρόταση 2 του Βιβλίου Χ των «Στοιχείων».

Η ανακάλυψη ότι *δεν υπάρχει κοινό μέτρο της διαγωνίου και της πλευράς του τετραγώνου* αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Το πώς ακριβώς έγινε αυτή η ανακάλυψη παραμένει θέμα ανοικτό για το οποίο έχουν προταθεί ποικίλες ερμηνείες. Όμως η ανακάλυψη αυτή, καθώς και η δυσκολία λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου (βλ. *Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*) έδωσαν νέα ώθηση στα μαθηματικά των μετρούμενων μεγεθών.

Η γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Η ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών οδήγησε στη διατύπωση μιας νέας θεωρίας από τον Εύδοξο τον Κνίδιο που εκτίθεται στο Βιβλίο V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Η *νέα θεωρία των αναλογιών* στηρίζεται στη γενική έννοια του μεγέθους, περιλαμβάνοντας έτσι και τους αριθμούς και τα άλλα συνεχή μεγέθη (μήκη, επιφάνειες, όγκοι). Η έννοια αυτή εισάγεται αξιωματικά με τη βοήθεια των *Κοινών Εννοιών* στο Βιβλίο Ι που ορίζουν τις σχέσεις ισότητας και ανισότητας.

Ο Εύδοξος ορίζει πότε δύο ζεύγη Αρχιμήδειων μεγεθών α, β και γ, δ έχουν τον ίδιο λόγο με τη βοήθεια των πολλαπλασίων αυτών των μεγεθών, δηλαδή όταν: 1) $μα > νβ$ και $μγ > νδ$ ή 2) $μα = νβ$ και $μγ = νδ$, ή 3) $μα < νβ$ και $μγ < νδ$. Στην περίπτωση αυτή τα μεγέθη α, β, γ, δ λέγονται *ανάλογα*. Η σχέση της αναλογίας είναι σχέση τύπου ισότητας, δηλαδή συμμετρική και μεταβατική, και έτσι τα ζεύγη μεγεθών διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας ζευγών που έχουν τον ίδιο λόγο. Έτσι, ο λόγος μπορεί να εισαχθεί ως το κοινό χαρακτηριστικό που έχουν τα ζεύγη μεγεθών μιας κλάσης.

Η γενική θεωρία των αναλογιών αποτελεί τη βάση της μεθόδου της *εξάντλησης*, η οποία εφαρμόστηκε από τους αρχαίους Έλληνες στη μέτρηση (μη στοιχειωδών) επιφανειών και όγκων. Στηρίζεται στην ιδέα ότι αν από κάποιο μέγεθος αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό, από το υπόλοιπο επίσης κ.ο.κ., τότε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων παίρνουμε υπόλοιπο μικρότερο από οποιοδήποτε δεδομένο μέγεθος («Στοιχεία», Βιβλίο Χ, Πρόταση 1). Με άλλα λόγια, η διαφορά ανάμεσα σε μια μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε ένα όριο, και στο όριο αυτό, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε με υποδιπλασιασμό της. Με τη βοήθεια της μεθόδου της εξάντλησης ο Εύδοξος απέδειξε τα παρακάτω θεωρήματα:

1. Τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν λόγο ίσο προς το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.
2. Ο όγκος πυραμίδας ισούται με το 1/3 του όγκου του πρίσματος με την ίδια βάση και ύψος.
3. Ο όγκος του κώνου ισούται με το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος.

Με την ίδια μέθοδο ο Αρχιμήδης βρήκε ένα πλήθος νέων εμβαδών και όγκων, όπως το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου και κώνου, το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας, τον όγκο της σφαίρας κ.ά.

Αρχιμήδεια και μη Αρχιμήδεια μεγέθη. Για να ισχύει η θεωρία των αναλογιών πρέπει να ορίζεται ο λόγος ανάμεσα στα συγκρινόμενα μεγέθη α, β. Αυτό εξασφαλίζεται αν υπάρχουν ακέραιοι μ και ν τέτοιοι, ώστε $μα > β$ και $νβ > α$ («Στοιχεία», Βιβλίο V, Ορισμός 4). Η συνθήκη αυτή ονομάζεται σήμερα *αξίωμα του Ευδόξου* (ή, συχνότερα, *αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου*). Τα μεγέθη για τα οποία ικανοποιείται το αξίωμα αυτό λέγονται σήμερα *Αρχιμήδεια*.

Ας σημειωθεί πως μη Αρχιμήδεια μεγέθη ήταν γνωστά στην Ελληνική αρχαιότητα, όπως οι λεγόμενες *κερατοειδείς γωνίες*. Πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζεται π.χ. από το τόξο περιφέρειας και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της, δηλαδή το μέρος του επιπέδου που περιέχεται μεταξύ του τόξου και της εφαπτομένης στο σημείο επαφής. Οσοδήποτε και αν μεγαλώσει μια τέτοια γωνία δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί τη γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και οποιαδήποτε τέμνουσα του τόξου στο σημείο τομής. Ένα τέτοιο μέγεθος *α*, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό *ν* παραμένει μικρότερο του μεγέθους *β*, ονομάζεται *ενεργεία απειροστό* ως προς το *β*, ή αντίθετα, το *β* λέγεται *ενεργεία άπειρο* μέγεθος ως προς το *α*.