ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ ΚΑΙ ΑΦΑΝΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Η ισοδυναμία του νόμου ημιτόνων με το νόμο των συνημιτόνων

Μιχάλης Κοντάκης, Μιχάλης Σαματάς, Εμμανουέλα Τσαγκαράκη
Υπεύθυνος εκπαιδευτικός: Δημήτρης Καλυκάκης
Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου Κρήτης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία μας αυτή αποδεικνύομε ότι ο νόμος των ημιτόνων είναι ισοδύναμος με το νόμο των συνημιτόνων. Η σχέση αυτή, δεν τονίζεται ούτε στα σχολικά εγχειρίδια ούτε στη υπόλοιπη βιβλιογραφία. Είναι συνεπώς μια αφανής, πλην όμως πολύ σημαντική σχέση. Πρακτικά σημαίνει ότι, εάν ένα γεωμετρικό πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με χρήση του ενός νόμου, τότε μπορεί να επιλυθεί και με χρήση του άλλου νόμου, αν και οι δύο προσεγγίσεις πιθανώς να διαφέρουν στο μήκος ή την πολυπλοκότητα της απόδειξης. Αφού πρώτα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στην ιστορική εξέλιξη των δύο νόμων, στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την απόδειξη της ισοδυναμίας.

1. Μια ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη των δύο νόμων της τριγωνομετρίας

Σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ οι λόγοι των πλευρών προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών είναι ίσοι, δηλαδή

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\eta\mu A}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\eta\mu B}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\eta\mu \Gamma}}.$$

Τη σπουδαιότητα των λόγων αυτών είχε διακρίνει ο Έλληνας αστρονόμος Κλαύδιος Πτολεμαίος (85μ.Χ.-165μ.Χ) ο οποίος τους χρησιμοποιούσε, σε συνδυασμό με πίνακες που περιείχαν μήκη χορδών κύκλου, για την επίλυση επίπεδων και σφαιρικών τριγώνων, όπως είναι αποτυπωμένο στο μνημειώδες έργο του *Μεγίστη Σύνταξη*, γνωστότερο ως *Αλμαγέστη*. Ο Πτολεμαίος στηρίχθηκε στο έργο του μεγάλου αστρονόμου και μαθηματικού Ίππαρχου του Ρόδιου (190π.Χ.-120π.Χ.) ο οποίος ήταν ο πρώτος που συνέταξε τριγωνομετρικούς πίνακες και ασχολήθηκε με επίπεδη και σφαιρική τριγωνομετρία.

Πιθανότατα, ο πρώτος που διατύπωσε και απέδειξε μια πρώιμη μορφή του νόμου των ημιτόνων, ήταν ο Ινδός μαθηματικός Brahmagupta (598μ.Χ.-670μ.Χ.) ο οποίος σε μια εργασία του πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας R, περιγεγραμμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ, βρήκε ότι $\boldsymbol{2R = \frac{\alpha}{\eta\mu A}}$, σχέση που ισοδυναμεί με την ισότητα των τριών λόγων. Αυτός όμως που στην

πραγματικότητα διατύπωσε το νόμο των ημιτόνων για επίπεδα τρίγωνα, ήταν ο Άραβας μαθηματικός Al-Biruni (973μ.Χ.-1048μ.Χ.) τα έργα του οποίου μεταφράστηκαν αργότερα στην Ευρώπη.

Ο νόμος των συνημιτόνων ήταν γνωστός στους αρχαίους Έλληνες πολύ πιο πριν από τον Πτολεμαίο. Διατυπώνεται με τη μορφή προβολών στο Βιβλίο ΙΙ των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (325π.Χ.-265π.Χ.) και συγκεκριμένα στη Πρόταση 12 (για αμβλυγώνια τρίγωνα) και στη Πρόταση 13 (για οξυγώνια τρίγωνα). Η αντίστοιχη έκδοση του νόμου των συνημιτόνων για σφαιρικά τρίγωνα, αποδίδεται στον Άραβα μαθηματικό Al-Battani (868μ.Χ.-929μ.Χ.). Ο νόμος των συνημιτόνων στη μορφή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$, θεωρείται ότι έγινε γνωστός από το Γάλλο μαθηματικό Francois Viete (1540-1603), μετά την καθιέρωση του αλγεβρικού συμβολισμού.

Να σημειωθεί ότι την περίοδο της Αναγέννησης, ο Γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος Johann Müller (1436-1476), γνωστός και ως Regiomontanus, συγκέντρωσε, οργάνωσε και παρουσίασε ενιαία και μεθοδικά όλες τις υπάρχουσες τριγωνομετρικές γνώσεις, συμπεριλαμβανομένου του νόμου ημιτόνων και συνημιτόνων, στην περίφημη πραγματεία του *De triangulis omnimondis* (περί των πάσης φύσεως τριγώνων), με τρόπο που θύμιζε αρκετά αυτόν με τον οποίο ο Ευκλείδης συνέγραψε τα *Στοιχεία* του. Το έργο αυτό του Regiomontanus, αν και δεν ήταν γραμμένο με αλγεβρικό συμβολισμό, αποτελεί τη βάση στην οποία εδράζεται η τριγωνομετρία σήμερα.

2. Η απόδειξη της ισοδυναμίας του νόμου των ημιτόνων με τον νόμο των συνημιτόνων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε την απόδειξη της ισοδυναμίας του νόμου των ημιτόνων με το νόμο των συνημιτόνων, χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\eta\mu(x+y) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu x.$$

$$\sigma\upsilon\nu(x+y) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu x \cdot \eta\mu y.$$

Οι τρεις παραπάνω τριγωνομετρικές ταυτότητες, συνήθως αποδεικνύονται γεωμετρικά με χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, μπορούν όμως να αποδειχθούν και χωρίς τη χρήση του θεωρήματος αυτού, κάνοντας χρήση μονάχα του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών και τεχνικών διαφορικού λογισμού.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) (*Νόμος συνημιτόνων*) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

β) (*Νόμος ημιτόνων*) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) $\Rightarrow$ β) Έστω ότι ισχύει η σχέση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο λόγος $\frac{\alpha}{\eta\mu A}$ είναι ίσος με μια έκφραση συμμετρική ως προς α, β, γ.

Έτσι θα προκύψει αυτόματα η ισότητα $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$.

Λύνοντας ως προς $\sigma\upsilon\nu$ την αρχική σχέση έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έπεται

$$\sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2},$$

ή ισοδύναμα

$$1 - \sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{4\beta^2\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2} - \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2},$$

δηλαδή

$$\eta\mu^2 A = \frac{-\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2}.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με α έχουμε

$$\frac{\eta\mu^2 A}{\alpha^2} = \frac{-\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2},$$

όμως $\alpha, \eta\mu A > 0$, άρα

$$\frac{\eta\mu A}{\alpha} = \sqrt{\frac{-\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}}.$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας είναι ποσότητα συμμετρική ως προς τα α, β, γ. Συνεπώς κάθε ένας από τους λόγους $\frac{\alpha}{\eta\mu A}, \frac{\beta}{\eta\mu B}, \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ είναι ίσος προς τον αντίστροφο αυτής της συμμετρικής ποσότητας και επομένως μεταξύ τους ίσοι.

β) ⇒ α) Έστω ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \lambda,$$

όπου $\lambda \neq 0$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A.$$

Αντικαθιστώντας $\alpha = \eta\mu A \cdot \lambda$, $\beta = \eta\mu B \cdot \lambda$, $\gamma = \eta\mu \Gamma \cdot \lambda$ στην παραπάνω σχέση προκύπτει ισοδύναμα ότι

$$\eta\mu^2 A \cdot \lambda^2 = \eta\mu^2 B \cdot \lambda^2 + \eta\mu^2 \Gamma \cdot \lambda^2 - 2\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \cdot \lambda^2.$$

Διαιρώντας με λ^2 και λαμβάνοντας υπόψη ότι $A + B + \Gamma = \pi$ έχουμε

$$\eta\mu^2[\pi - (B + \Gamma)] = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma - 2\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu[\pi - (B + \Gamma)],$$

ή ισοδύναμα

$$\eta\mu^2(B + \Gamma) = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma + 2\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma).$$

Αλλά

$$\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma + \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma - \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma$$

οπότε αντικαθιστώντας αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma + \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B)^2 = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma + 2\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot (\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma - \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma),$$

ή ισοδύναμα

$$\eta\mu^2 B \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu^2 \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2 B + 2\eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B =$$

$$= \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma + 2\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma - 2\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma,$$

δηλαδή, μετά τη διαγραφή του $2\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma$,

$$\eta\mu^2 B \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu^2 \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2 B = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma - 2\eta\mu^2 B \cdot \eta\mu^2 \Gamma.$$

Όμως το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας γράφεται ισοδύναμα

$$\eta\mu^2 B - \eta\mu^2 B \cdot \eta\mu^2 \Gamma + \eta\mu^2 \Gamma - \eta\mu^2 B \cdot \eta\mu^2 \Gamma =$$

$$\eta\mu^2 B \cdot (1 - \eta\mu^2 \Gamma) + \eta\mu^2 \Gamma \cdot (1 - \eta\mu^2 B) =$$

$$\eta\mu^2 B \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu^2 \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2 B,$$

που είναι ακριβώς το αριστερό μέλος.
Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες δύο ισότητες.

Ο.Ε.Δ.

3. Ευχαριστίες

Ευχαριστούμε θερμά όλους τους παρακάτω για την εμπιστοσύνη που μας περιέβαλαν:
α) τη Σχολική Επιτροπή του Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου Κρήτης, την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, το Βιβλιοπωλείο Αλέκου Δοκιμάκη και τα Σούπερ Μάρκετ «Χαλκιαδάκης Α.Ε.» για την οικονομική υποστήριξη που μας παρείχαν
β) την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία για τη δυνατότητα που μας έδωσε να συμμετάσχουμε με την παρούσα εργασία στο 5^{ο} Παγκύπριο Μαθητικό Συνέδριο για τα Μαθηματικά
γ) τον κ. Νίκο Πρωτοπαππά για την υποστήριξη και την θερμότατη φιλοξενία που μας προσέφερε στη Λευκωσία.

4. Βιβλιογραφία

1. Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2008). *Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
2. Burton, L.J. (1949). The laws of sines and cosines. *American Mathematical Monthly*, October, 550-551.
3. Cajori, F. (1991). *A history of mathematics (5th ed.)*. New York: Chelsea Publishing Company. (Πρώτη έκδοση 1893).
4. Crossfield, D., Shepherd, C., Stein, R., Williams, G. (2001). *Trigonometry. Historical Modules Project*. American Association of America.
5. Θωμαΐδης, Γ. (1981). Αρχή και εξέλιξη της τριγωνομετρίας. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τ.24, 45-73.
6. Maor, E. (2002). *Τριγωνομετρικά Λουκούμια*. (Τ. Μιχαηλίδης, μετάφρ.). Αθήνα: Κάτοπτρο. (Πρωτότυπη έκδοση 1998).
7. Spivak, M. (1991). *Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός*. (Α. Γιαννόπουλος, μετάφρ.). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
8. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/