ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Του Δημητρίου Εμμ. Καλυκάκη

Περίληψη
Η γεωμετρική πιθανότητα επεκτείνει την έννοια της κλασικής πιθανότητας και για πειράματα τύχης που έχουν δειγματικό χώρο ο οποίος δεν είναι πεπερασμένος. Στην εργασία αυτή μελετάμε πειράματα τύχης που έχουν δειγματικό χώρο ένα υποσύνολο του επιπέδου με θετικό εμβαδόν, όπως τρίγωνα, τετράγωνα ή κυκλικούς δίσκους. Τα παραδείγματα αυτά είναι προσαρμοσμένα στο γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου, όπως αυτό προσδιορίζεται από το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.). Σκοπός της εργασίας είναι να αναδείξει τα πλεονεκτήματα που θα μπορούσαν να προκύψουν από την ενασχόληση των μαθητών με προβλήματα γεωμετρικής πιθανότητας, τόσο στο πλαίσιο του κεφαλαίου των Πιθανοτήτων, όσο και στο ευρύτερο πλαίσιο της Άλγεβρας – Γεωμετρίας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι Πιθανότητες είναι ένας σχετικά πρόσφατος κλάδος στην ιστορία των Μαθηματικών. Δύο Γάλλοι μαθηματικοί, ο Blaise Pascal (1623-1662) και ο Pierre de Fermat (1601-1665) έθεσαν τα θεμέλια της θεωρίας των πιθανοτήτων στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, μελετώντας αρχικά παιχνίδια τύχης με ζάρια και τραπουλόχαρτα. Από τότε μέχρι σήμερα, η θεωρία των πιθανοτήτων αναπτύχθηκε σε μια μοντέρνα θεωρία, κυρίως μετά τη συμβολή του Ρώσου μαθηματικού Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).

Εκτός από παιγνίδια τύχης με ζάρια και τραπουλόχαρτα, η σύγχρονη θεωρία των πιθανοτήτων μπορεί να εφαρμοστεί σε μια μεγάλη ποικιλία περιπτώσεων ακόμα και αν ο δειγματικός χώρος δεν είναι πεπερασμένος. Μερικές από αυτές τις περιπτώσεις είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσες και συνάμα πολύ απλές στη διαχείρισή τους, χρησιμοποιώντας γεωμετρικά αντί αλγεβρικά επιχειρήματα. Μια επιλογή από προβλήματα του είδους αυτού παρουσιάζουμε στην εργασία μας αυτή.

Αρχικά ορίζουμε και σχολιάζουμε την έννοια της γεωμετρικής πιθανότητας, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζουμε και μελετούμε πέντε εφαρμογές της γεωμετρικής πιθανότητας: δύο προβλήματα ρίψης σε στόχο, ένα πρόβλημα από την Ευκλείδεια γεωμετρία, ένα πρόβλημα «ξυλοκοπτικής» και το λεγόμενο πρόβλημα του «ραντεβού». Όλοι οι υπολογισμοί στηρίζονται σε γεωμετρικά σχήματα. Το πλεονέκτημα των γεωμετρικών σχημάτων στον υπολογισμό της πιθανότητας είναι ακριβώς η εποπτεία που παρέχουν, η οποία επιτρέπει συχνά την ανάπτυξη μιας διαίσθησης της λύσης πριν από κάθε λογαριασμό.

Οι πέντε ενδεικτικές εφαρμογές που παρουσιάζουμε, μπορούν να δοθούν στους μαθητές ως *δραστηριότητα* για το σπίτι μετά τη συμπλήρωση του κεφαλαίου των Πιθανοτήτων της Άλγεβρας στη Γ΄ τάξη Γυμνασίου ([3]). Τα οφέλη που αναμένεται να αποκομίσει ο μαθητής από την εργασία του αυτή είναι πολλαπλά και παρουσιάζονται στην ενότητα των συμπερασμάτων μετά την μελέτη των πέντε εφαρμογών.

Σημειώνουμε ότι η σχέση που συνδέει τις Πιθανότητες με την Γεωμετρία είναι το αντικείμενο ενός ολόκληρου κλάδου των μαθηματικών, της λεγόμενης *Ολοκληρωτικής Γεωμετρίας* (integral geometry). Το εμβαδόν υπολογίζεται γενικά με χρήση απλού ή διπλού ολοκληρώματος, συνεπώς είναι αναμενόμενη η εμπλοκή πιο προχωρημένων μαθηματικών εργαλείων για μια εκτενέστερη μελέτη της γεωμετρικής πιθανότητας ([2]). Μια πιθανή επέκταση των ιδεών της εργασίας αυτής σε επίπεδο λυκείου θα μπορούσε να περιελάμβανε το γνωστό πρόβλημα της βελόνας του Buffon ή το παράδοξο του Bertrand.

2. Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας διατυπώθηκε αρχικά από τον De Moivre (1711). Η θεμελίωση της θεωρίας των πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας αποδίδεται στον Laplace (1812).

ΟΡΙΣΜΟΣ (**Κλασική Πιθανότητα**): *Αν* Ω *είναι ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος του οποίου τα στοιχεία είναι εξίσου πιθανά, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου* $\mathrm{A} \subset \Omega$, *συμβολιζόμενη* P(A), *δίδεται από τη σχέση*

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}} \qquad (1)$$

όπου, N(A) *είναι το πλήθος των στοιχείων του ενδεχόμενου* A *και* N(Ω) *είναι το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου* Ω.

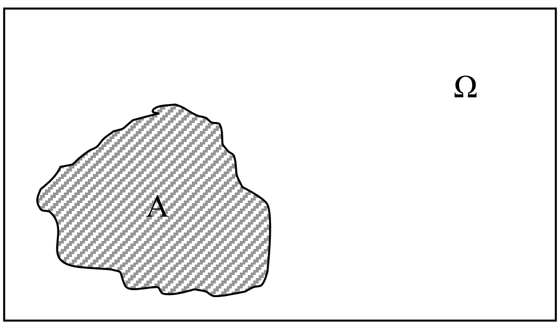
Η γεωμετρική πιθανότητα είναι επέκταση της κλασικής πιθανότητας στη περίπτωση που ο δειγματικός χώρος δεν είναι πεπερασμένος. Όταν είναι, για παράδειγμα, ένα υποσύνολο του επιπέδου με θετικό εμβαδόν.

ΟΡΙΣΜΟΣ (**Γεωμετρική Πιθανότητα**): *Αν* Ω *είναι ένας δειγματικός χώρος, που ως σύνολο είναι υποσύνολο του επιπέδου με θετικό εμβαδόν, και οποιεσδήποτε στοιχειώδεις περιοχές του είναι εξίσου πιθανές, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου* $\mathrm{A} \subset \Omega$, *συμβολιζόμενη* P(A), δίδεται *από τη σχέση*

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\varepsilon\mu\beta\,(\mathrm{A})}{\varepsilon\mu\beta\,(\Omega)} \qquad (2)$$

όπου, $\varepsilon\mu\beta\,(\mathrm{A})$ *είναι το εμβαδόν του ενδεχομένου* A *και* $\varepsilon\mu\beta\,(\Omega)$ *είναι το εμβαδόν του δειγματικού χώρου* Ω.

Συχνά, το ενδεχόμενο Α καλείται και «ευνοϊκή περιοχή» του πειράματος τύχης.



ΣΧΟΛΙΑ:

1. Ο τύπος (2) που δίνει τη γεωμετρική πιθανότητα, βρίσκεται σε απόλυτη αναλογία με τον τύπο (1) που δίνει την κλασική πιθανότητα. Πράγματι, στη περίπτωση που ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος, οι αριθμοί Ν(Α) και Ν(Ω) δηλώνουν το *μέγεθος* του συνόλου Α και Ω, αντίστοιχα. Στη περίπτωση που ο δειγματικός χώρος Ω είναι ένα υποσύνολο του επιπέδου που έχει τη δύναμη του συνεχούς, το μέγεθος του Α και του Ω μετράται από την έκταση που καταλαμβάνει έκαστο, δηλαδή από το εμβαδόν.

2. Η γεωμετρική πιθανότητα είναι *επέκταση* της κλασικής πιθανότητας υπό την έννοια ότι:
α) η μεν κλασική πιθανότητα αφορά πειράματα με δειγματικό χώρο πεπερασμένο, η δε γεωμετρική πιθανότητα αφορά πειράματα με δειγματικό χώρο που δεν είναι πεπερασμένος και
β) τόσο η κλασική πιθανότητα (σχέση 1), όσο και η γεωμετρική πιθανότητα (σχέση 2) είναι ειδικές περιπτώσεις της *πιθανότητας κατά Kolmogorov* ([1]), δηλαδή ικανοποιούν τα ακόλουθα τρία αξιώματα:
<u>Αξίωμα 1</u>: $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$, για κάθε ενδεχόμενο Α.
<u>Αξίωμα 2</u>: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
<u>Αξίωμα 3</u>: $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$, για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα Α, Β με $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = 0$.
Ο έλεγχος του παραπάνω ισχυρισμού είναι φυσικά τετριμμένος.

3. Υπό το πρίσμα της γεωμετρικής πιθανότητας, οι βασικοί κανόνες του λογισμού των πιθανοτήτων

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}') = 1,$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

είναι άμεσες συνέπειες της προσθετικής ιδιότητας του εμβαδού. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε τη σχέση (2) στους παραπάνω δύο κανόνες και απαλείψουμε τους παρονομαστές, έχουμε

$$\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}) + \varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}') = \varepsilon\mu\beta(\Omega),$$
$$\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}) + \varepsilon\mu\beta(\mathrm{B}) - \varepsilon\mu\beta(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

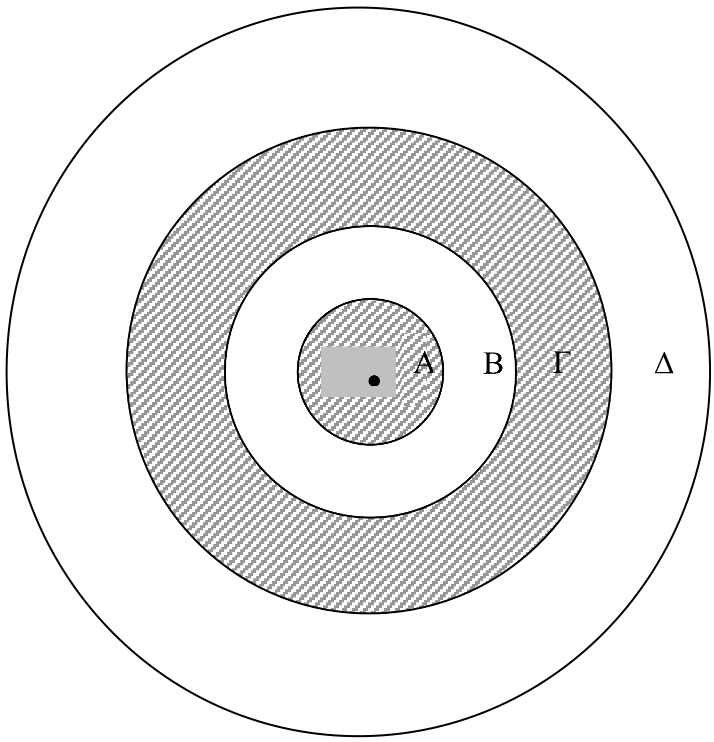
Σημείωση: Ο λόγος που αφαιρούμε το $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ από το $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A}) + \varepsilon\mu\beta(\mathrm{B})$ για να προκύψει το $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$, είναι ότι το $\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ έχει υπολογιστεί δύο φορές, αφού το $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ περιέχεται και στο Α και στο Β.

3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε πέντε χαρακτηριστικές εφαρμογές της γεωμετρικής πιθανότητας. Πρόκειται για πέντε πειράματα τύχης, στα οποία το πρώτο μέλημα είναι ο προσδιορισμός του δειγματικού χώρου Ω και στη συνέχεια, της ευνοϊκής περιοχής, που συνήθως την συμβολίζουμε με Α.

<u>Εφαρμογή 1</u>: **Ρίψη βέλους σε στόχο**

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένας κυκλικός στόχος ακτίνας 100cm, στον οποίο έχουν σχεδιαστεί τρεις ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνα 25cm, 50cm και 75cm αντίστοιχα. Έτσι ο κυκλικός στόχος διαμερίζεται σε τέσσερις περιοχές: α) τον κυκλικό *δίσκο Α με κέντρο το κέντρο του στόχου και ακτίνα 25cm, β) το δακτύλιο Β με εσωτερική ακτίνα 25cm και εξωτερική ακτίνα 50cm, γ) τον δακτύλιο Γ με εσωτερική ακτίνα 50cm και εξωτερική ακτίνα 75cm και δ) τον δακτύλιο Δ με εσωτερική ακτίνα 75cm και εξωτερική ακτίνα 100cm.*



Εάν ρίψουμε, με τυχαίο τρόπο, ένα βέλος μέσα στον κυκλικό στόχο ακτίνας 100cm, ποια είναι η πιθανότητα το βέλος να καρφώσει σε καθεμιά από τις παραπάνω τέσσερις περιοχές;

Λύση

Σε κάθε περίπτωση, ο δειγματικός χώρος Ω είναι ο κυκλικός δίσκος ακτίνας 100cm, ενώ η ευνοϊκή περιοχή είναι η περιοχή Α, Β, Γ ή Δ, αντίστοιχα . Συνεπώς,

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\varepsilon\mu\beta(\mathrm{A})}{\varepsilon\mu\beta(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 25^2}{\pi \cdot 100^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\%.$$

$$P(\mathrm{B}) = \frac{\varepsilon\mu\beta(\mathrm{B})}{\varepsilon\mu\beta(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 50^2 - \pi \cdot 25^2}{\pi \cdot 100^2} = \frac{3}{16} = 0{,}1875 = 18{,}75\%.$$

$$P(\Gamma) = \frac{\varepsilon\mu\beta(\Gamma)}{\varepsilon\mu\beta(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 75^2 - \pi \cdot 50^2}{\pi \cdot 100^2} = \frac{5}{16} = 0{,}3125 = 31{,}25\%.$$

$$P(\Delta) = \frac{\varepsilon\mu\beta(\Delta)}{\varepsilon\mu\beta(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 100^2 - \pi \cdot 75^2}{\pi \cdot 100^2} = \frac{7}{16} = 0{,}4375 = 43{,}75\%.$$

ΣΧΟΛΙΑ:
1. Τονίζουμε ότι η ρίψη του βέλους είναι *τυχαία* και όχι κατόπιν σκοπεύσεως. Αλλιώς, δεν θα ήταν όλες οι στοιχειώδεις περιοχές του Ω εξίσου πιθανές, όπως απαιτεί ο ορισμός της γεωμετρικής πιθανότητας.
2. Ενδιαφέρουσες παραλλαγές του προβλήματος αυτού μπορεί να σχεδιάσει κανείς, αλλάζοντας το σχήμα του στόχου, π.χ. όπως στην άσκηση 15, σελ.126 ή ασκ.7, σελ.198 στο [4].

Υπό μια έννοια, και η επόμενη εφαρμογή θα μπορούσε να ενταχθεί στα παραδείγματα της κατηγορίας ρίψης σε στόχο. Χρησιμοποιεί, σε αντίθεση με την προηγούμενη εφαρμογή - κατά τρόπο ουσιαστικό - μια θεμελιώδη έννοια από τη φυσική.

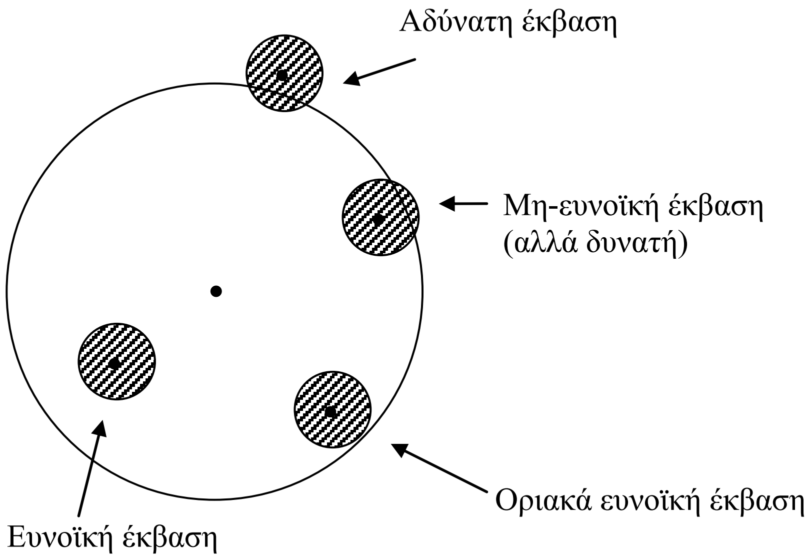
Εφαρμογή 2: **Το ζυμάρι του σεφ**

Ο δεξιοτέχνης σεφ μιας πιτσαρίας, μετά από τις γνωστές ταχυδακτυλουργικές κινήσεις, πετάει με τρόπο τυχαίο το κυκλικό ζυμάρι της πίτσας, που έχει ακτίνα 20cm, πάνω σε ένα κυκλικό τραπέζι ακτίνας 1 m στο οποίο κάθεται (το ζυμάρι).

Ποια είναι η πιθανότητα όλο το ζυμάρι να βρεθεί πάνω στο τραπέζι.

Λύση

Ρυθμιστικός παράγοντας στην υπόθεση αυτή είναι το κέντρο βάρους του ζυμαριού. Αφού το ζυμάρι κάθεται τελικά στο τραπέζι, έπεται ότι το κέντρο βάρους του, βρίσκεται εντός του κυκλικού δίσκου ακτίνας 1m. Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο κυκλικός δίσκος ακτίνας 1m.



Για να βρεθεί το ζυμάρι ολόκληρο πάνω στο τραπέζι, πρέπει και αρκεί το κέντρο βάρους του να βρεθεί σε απόσταση το πολύ 100-20=80cm από το κέντρο του τραπεζιού. Άρα,

$$\text{ζητούμενη πιθανότητα} = \frac{\pi \cdot 80^2}{\pi \cdot 100^2} = 0{,}64$$

δηλαδή, η πιθανότητα το ζυμάρι να βρεθεί όλο πάνω στο τραπέζι, είναι 64%.

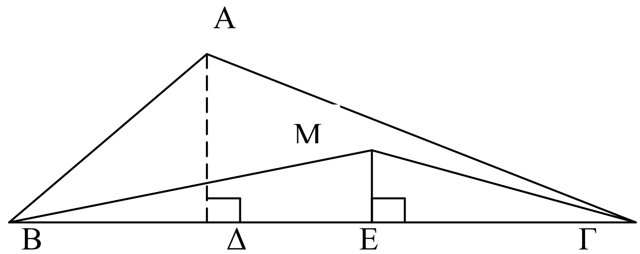
Εφαρμογή 3: **Από την Ευκλείδεια γεωμετρία**

Ας είναι ΑΒΓ ένα δεδομένο τρίγωνο και Μ ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο εντός του τριγώνου ΑΒΓ.

Ποια είναι η πιθανότητα το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

Λύση

Εδώ ο δειγματικός χώρος είναι το τρίγωνο (τριγωνική περιοχή) ΑΒΓ.



Αν Μ είναι ένα τυχαίο σημείο εντός του τριγώνου ΑΒΓ, τότε

$$\varepsilon\mu\beta(\mathrm{M}\mathrm{B}\Gamma) \geq \frac{1}{2}\cdot \varepsilon\mu\beta(\mathrm{AB}\Gamma)$$

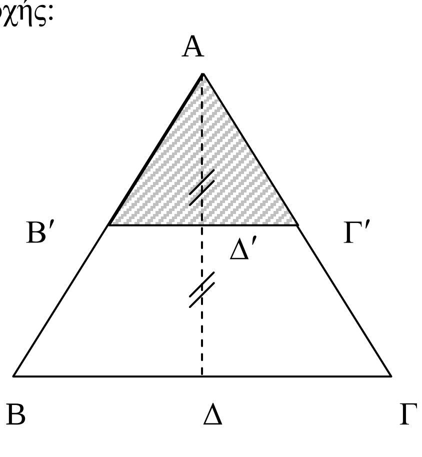
αν και μόνο αν,

$$\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{B}\Gamma)\cdot(\mathrm{ME}) \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{B}\Gamma)\cdot(\mathrm{A}\Delta)$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathrm{ME} \geq \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{A}\Delta)$$

δηλαδή, το υψόμετρο του σημείου Μ οφείλει να είναι τουλάχιστον το μισό του ύψους ΑΔ. Συνεπώς, η ευνοϊκή περιοχή απαρτίζεται από τα σημεία της παρακάτω γραμμοσκιασμένης περιοχής:



Όμως, $\mathrm{A\Delta'} = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{A\Delta})$ οπότε, λόγω ομοιότητας, $\mathrm{B'\Gamma'} = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{B\Gamma})$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\varepsilon\mu\beta(\mathrm{AB'\Gamma'})}{\varepsilon\mu\beta(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{B'\Gamma'})\cdot(\mathrm{A\Delta'})}{\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{B\Gamma})\cdot(\mathrm{A\Delta})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{B\Gamma})\cdot\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{A\Delta})}{\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{B\Gamma})\cdot(\mathrm{A\Delta})} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Οι επόμενες δύο εφαρμογές, σε αντίθεση με ότι έχουμε δει μέχρι το σημείο αυτό, απαιτούν περισσότερη μαθηματική ωριμότητα από ένα μαθητή Γ΄ Γυμνασίου. Ειδικότερα, απαιτούν εξοικείωση με το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, την εξίσωση της ευθείας και την γραφική λύση γραμμικής ανίσωσης.

Εφαρμογή 4: **Το πρόβλημα της κατασκευής τριγωνικού πλαισίου**

Κόβουμε τυχαία μια ξύλινη (ευθύγραμμη) βέργα σε τρία κομμάτια. Ποια είναι η πιθανότητα, με τα τρία αυτά κομμάτια, να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα τριγωνικό πλαίσιο;

Λύση

Έστω ΟΑ το ευθύγραμμο τμήμα που αντιπροσωπεύει τη βέργα και Χ, Υ τα δύο διαφορετικά εσωτερικά σημεία που έχει γίνει η (τυχαία) κοπή, με το σημείο Χ να είναι αριστερά του σημείου Υ. Υποθέτομε επίσης ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ έχει μήκος α .

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΧ, ΧΥ και ΥΑ αποτελούν πλευρές τριγώνου αν και μόνο αν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή

$$\mathrm{OX} < \mathrm{XY} + \mathrm{YA} \text{ και } \mathrm{XY} < \mathrm{OX} + \mathrm{YA} \text{ και } \mathrm{YA} < \mathrm{OX} + \mathrm{XY}.$$

Η σχέση $\mathrm{OX} < \mathrm{XY} + \mathrm{YA}$ γράφεται ισοδύναμα $2\cdot\mathrm{OX} - \mathrm{OX} < \mathrm{XY} + \mathrm{YA}$ ή $2\cdot\mathrm{OX} < \mathrm{OX} + \mathrm{XY} + \mathrm{YA}$, άρα

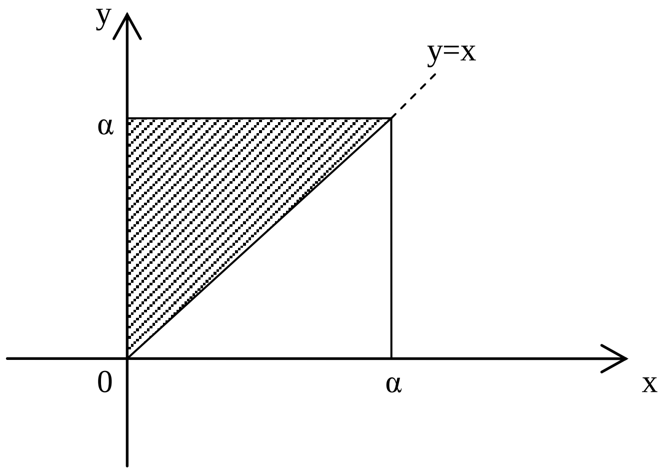
$$\mathrm{OX} < \frac{\alpha}{2}.$$

Συνεπώς, η συνθήκη της τριπλής τριγωνικής ανισότητας γράφεται ισοδύναμα,

$$\mathrm{OX} < \frac{\alpha}{2} \text{ και } \mathrm{XY} < \frac{\alpha}{2} \text{ και } \mathrm{YA} < \frac{\alpha}{2}.$$

Αν x είναι η απόσταση του σημείου Χ από το Ο και y η απόσταση του σημείου Υ από το Ο, τότε $0 < x < y < \alpha$. Άρα, ο δειγματικός χώρος είναι όλα εκείνα τα σημεία (x, y)

του Καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία $0 < x < y < \alpha$. Πρόκειται δηλαδή, για την παρακάτω τριγωνική περιοχή.



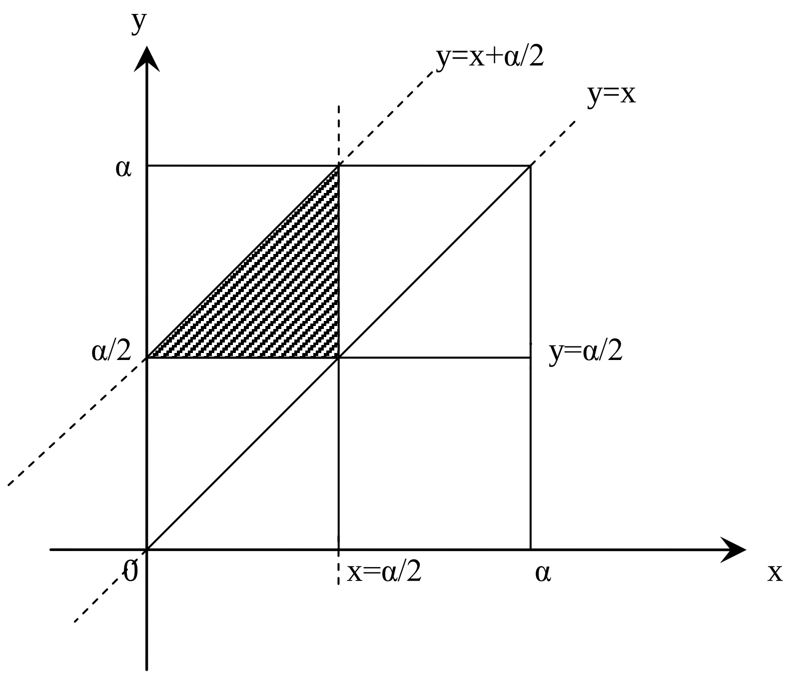
Η ευνοϊκή περιοχή καθορίζεται από την τριπλή τριγωνική ανισότητα, η οποία πλέον (με χρήση των μεταβλητών *x*, *y*) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$x < \frac{\alpha}{2} \text{ και } y - x < \frac{\alpha}{2} \text{ και } \alpha - y < \frac{\alpha}{2}$$

ή ισοδύναμα,

$$x < \frac{\alpha}{2} \text{ και } y < x + \frac{\alpha}{2} \text{ και } y > \frac{\alpha}{2}.$$

Το τελευταίο σύστημα ανισοτήτων, ως τομή τριών ημιεπιπέδων, ορίζει την ακόλουθη τριγωνική περιοχή



που είναι το ¼ του δειγματικού χώρου.

Άρα, η πιθανότητα τα τρία ευθύγραμμα τμήματα να αποτελούν πλευρές τριγώνου είναι 25%.

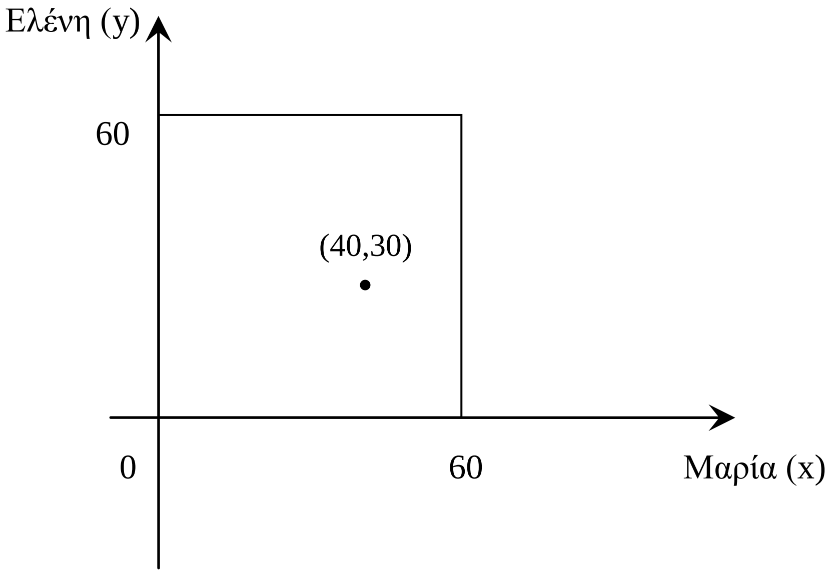
Εφαρμογή 5: **Το πρόβλημα της συνάντησης**

Δύο φίλες η Μαρία και η Ελένη κατέβηκαν για ψώνια στο κέντρο της πόλης. Συμφώνησαν να χωρίσουν για λίγο και να ξανασυναντηθούν το μεσημέρι μπροστά στο Δημαρχείο κάποια στιγμή μεταξύ 12:00 και 13:00. Συγκεκριμένα, συμφώνησαν όποια φτάσει πρώτη να περιμένει 15 λεπτά την άλλη. Σε περίπτωση όμως που δεν έρθει σε 15 λεπτά, να φύγει και να συνεχίσει τα ψώνια.

Ποια είναι η πιθανότητα οι δύο φίλες να συναντηθούν κάποια στιγμή μεταξύ 12:00 και 13:00;

Λύση

Αν η Μαρία φτάσει στο Δημαρχείο x λεπτά μετά τις 12:00 και η Ελένη y λεπτά μετά τις 12:00, τότε το ζήτημα που μας απασχολεί μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ως εξής:



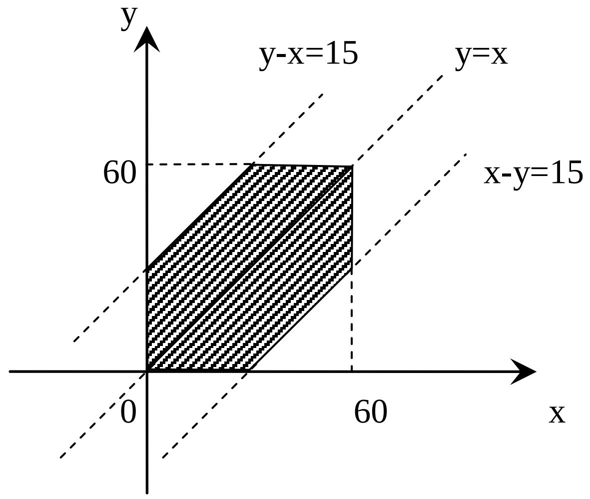
Το σημείο π.χ. (40,30) δηλώνει ότι η Μαρία έφτασε στο Δημαρχείο στις 12:40, ενώ η Ελένη στις 12:30. Το τετράγωνο αυτό είναι ο δειγματικός χώρος του προβλήματος, ο οποίος έχει εμβαδόν $60 \cdot 60 = 3600$ μονάδες.

Μένει τώρα να προσδιοριστεί η ευνοϊκή περιοχή του προβλήματος. Η ευνοϊκή περιοχή θα προσδιοριστεί από την περίοδο των 15 λεπτών αναμονής. Αποτελείται από δύο επιμέρους περιοχές: α) αυτή που αντιπροσωπεύει την περίπτωση που η Μαρία φτάνει πρώτη και β) εκείνη που αντιπροσωπεύει την περίπτωση που η Ελένη φτάνει πρώτη. Και οι δύο αυτές περιοχές κείνται εκατέρωθεν της ευθείας $y = x$, τα σημεία της οποίας αντιπροσωπεύουν την περίπτωση που οι δύο φίλες φτάνουν στο Δημαρχείο ταυτόχρονα.

Αν η Μαρία(x) φτάσει πρώτη, τότε θα συναντηθεί με την Ελένη(y), εάν $y - x < 15$.

Αν η Ελένη(y) φτάσει πρώτη, τότε θα συναντηθεί με τη Μαρία(x), εάν $x - y < 15$.

Συνεπώς, η ευνοϊκή περιοχή είναι η γραμμοσκιασμένη περιοχή του παρακάτω σχήματος



το εμβαδόν της οποίας είναι ίσο με αυτό του τετραγώνου μείον το εμβαδόν των δύο (λευκών) ορθογώνιων τριγώνων, δηλαδή $3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45 = 1575$ μονάδες. Άρα,

$$\text{ζητούμενη πιθανότητα} = \frac{1575}{3600} = 0{,}4375.$$

Η πιθανότητα οι δύο φίλες να συναντηθούν στο Δημαρχείο κάποια στιγμή μεταξύ 12:00 και 13:00, εάν η μία περιμένει την άλλη 15 λεπτά, είναι περίπου 44%.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι πέντε εφαρμογές - ή κάποιες από αυτές - που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούν να δοθούν στους μαθητές ως *δραστηριότητα* για το σπίτι μετά τη συμπλήρωση του κεφαλαίου των Πιθανοτήτων της Άλγεβρας στη Γ΄ τάξη Γυμνασίου. Θα μπορούσαν επίσης, να αποτελέσουν μια βάση για ένα *σχέδιο εργασίας* (με την έννοια που προσδίδεται στον όρο, στο πλαίσιο του νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών) που ως στόχο θα είχε την απάντηση του ερωτήματος: «*Μπορεί να οριστεί η έννοια της πιθανότητας και σε πειράματα τύχης που έχουν δειγματικό χώρο που δεν είναι πεπερασμένος;*».

Τα οφέλη που αναμένεται να αποκομίσει ο μαθητής από την εμπλοκή του σε μια τέτοια εργασία είναι πολλαπλά:

α) θα αντιληφθεί ότι η έννοια της πιθανότητας επεκτείνεται και σε περιπτώσεις πειραμάτων τύχης που έχουν δειγματικό χώρο ο οποίος δεν είναι πεπερασμένος, β) (υπό το πρίσμα της γεωμετρικής πιθανότητας) θα αντιληφθεί ότι οι βασικοί κανόνες του λογισμού των πιθανοτήτων είναι στην ουσία μια αναδιατύπωση της προσθετικής ιδιότητας του εμβαδού,

γ) θα έχει την ευκαιρία να συνδυάσει και να εφαρμόσει τις γνώσεις που αποκόμισε από την Ευκλείδεια και Καρτεσιανή γεωμετρία για να απαντήσει αμιγώς αλγεβρικά (πιθανοθεωρητικά) ερωτήματα,

δ) θα αντιληφθεί ότι δεν υπάρχει διαχωριστική γραμμή μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας, όπως ίσως να νόμιζε από τον φαινομενικό διαχωρισμό που επιχειρείται μέσα από τη διδασκαλία του μαθήματος, σύμφωνα με το νέο Α.Π.Σ.,

(η πρώτη φορά που συνειδητοποιεί την έλλειψη μιας τέτοιας διαχωριστικής γραμμής ο μαθητής είναι ίσως στη Β΄ Γυμνασίου, στην εισαγωγή των άρρητων αριθμών που συσχετίζονται με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Το ξαναβλέπει βέβαια στη τριγωνομετρία και στις εφαρμογές των εξισώσεων α΄ και β΄ βαθμού, πιστεύουμε όμως ότι θα αποτελούσε μεγάλη έκπληξη γι αυτόν αν του δινόταν η ευκαιρία να το ξαναδεί και στις Πιθανότητες),

ε) η εμπλοκή του στη λύση προβλημάτων από την καθημερινή ζωή εξαιρετικού ενδιαφέροντος, θα του δώσει κίνητρα για περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση στα Μαθηματικά,

στ) θα μπορέσει, αργότερα στο Λύκειο, να αξιοποιήσει περαιτέρω την ιδέα της γεωμετρικής πιθανότητας χρησιμοποιώντας την έννοια του ολοκληρώματος και

ζ) θα ασχοληθεί με ένα θέμα που εμφανίζεται εξαιρετικά σπάνια στην ελληνική βιβλιογραφία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, 1956
2. H. Solomon, *Geometric Probability*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 28
3. Δ. Αργυράκης, κ.ά., *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, 1η έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 2007
4. Π. Βλάμος, κ.ά., *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*, 1η έκδοση, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 2007
5. Χ. Α. Χαραλαμπίδη, *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1990

Δημήτριος Καλυκάκης, Ατλαντίδος 1, Τ.Κ. 71305, Ηράκλειο Κρήτης