Μέγιστα και ελάχιστα της Β’ Λυκείου με μαθηματικά της Β’ Γυμνασίου

1. Θεωρείστε το σύνολο των ζευγών (x, y) όλων των θετικών πραγματικών αριθμών x και y για τους οποίους ισχύει $x + y = \alpha =$ σταθερό.

i) Βρείτε το ζεύγος εκείνο για το οποίο η παράσταση $x^2 + y^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή. Υπολογίστε την ελάχιστη αυτή τιμή.

ii) Βρείτε το ζεύγος για το οποίο η παράσταση xy παίρνει μέγιστη τιμή. Υπολογίστε τη μέγιστη αυτή τιμή.

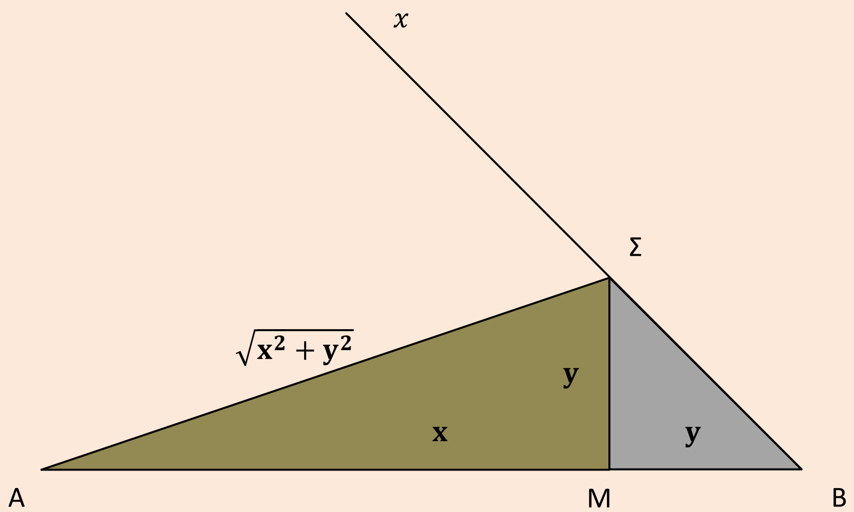
Απάντηση

1.

i)

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος α. Από το άκρο Β φέρουμε την ημιευθεία Βx έτσι ώστε η γωνία ΑΒx να είναι π/4. Από τυχαίο σημείο Μ του ΑΒ φέρουμε την κάθετο σε αυτό η οποία τέμνει την Βx στο σημείο Σ. Αν $(\mathrm{AM}) = x$ και $(\mathrm{MB}) = y$ έχουμε $x + y = \alpha$. Δηλαδή έχουμε να κάνουμε με το σχήμα 1.

Το γκρι ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές, αφού η μια του οξεία γωνία η Β

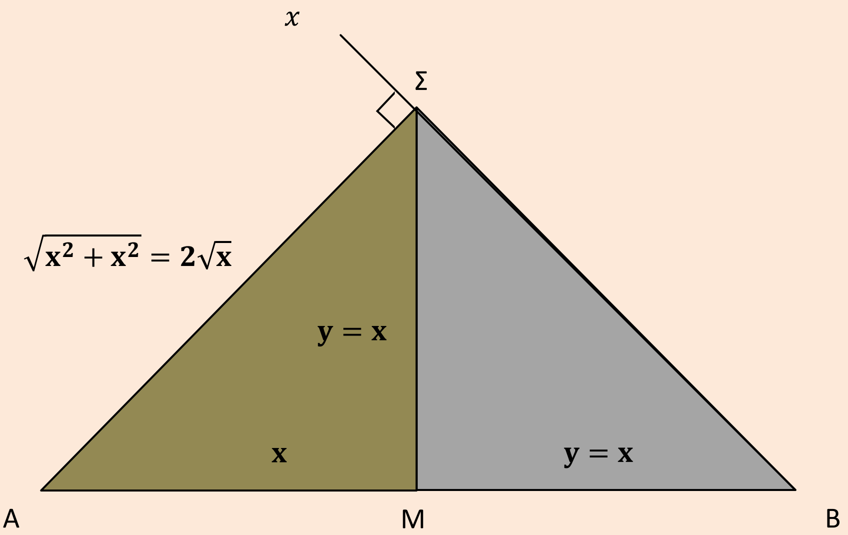


Σχήμα 1.

είναι π/4, οπότε(ΜΒ)=(ΜΣ)=y .

Δηλαδή το καφετί ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με μέτρα x και y και με τη βοήθεια του Πυθαγόρα υποτείνουσα $(\mathrm{A\Sigma}) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Τώρα καθώς το Μ κινείται ανάμεσα στα Α και Β και το Σ κινείται πάνω στην Βx είναι προφανές ότι το μήκος της ΑΣ και συνεπώς και η παράσταση $\mathbf{x^2 + y^2}$ παίρνει ελάχιστη τιμή όταν $\mathrm{A\Sigma} \perp \mathrm{Bx}$ και έτσι οδηγούμαστε στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2.

Είναι ξεκάθαρο πλέον, αφού το γκρι και το καφετί έχουν γίνει δυο ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα, ότι

$$\mathbf{x = y = \frac{\alpha}{2}}$$

και

$$(\mathbf{x^2 + y^2})_{\min} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

ii)

Η γνωστή ταυτότητα $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ μας δίνει $\alpha^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow$

$$xy = \frac{\alpha^2 - (x^2 + y^2)}{2}$$

Από την τελευταία σχέση είναι εμφανές ότι το γινόμενο xy μεγιστοποιείται όταν το άθροισμα $x^2 + y^2$ πάρει ελάχιστη τιμή δηλαδή, σύμφωνα με τα προηγηθέντα, όταν $x = y = \frac{\alpha}{2}$

Χρησιμοποιώντας τώρα και κάποιο συμβολισμό έχουμε

$$(\mathbf{xy})_{\mathbf{max}} = \frac{\alpha^2 - (x^2 + y^2)_{\min}}{2} = \frac{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}}{2} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}.$$