Εργαστήριο Μαθηματικών
Πρότυπων Πειραματικών Σχολείων Ηρακλείου

Προβληματισμός για τη διδασκαλία των θεωρημάτων διχοτόμων τριγώνου στο Λύκειο

Αυτό που ισχύει για την εισαγωγή των δύο θεωρημάτων διχοτόμων (εσωτερικής και εξωτερικής) στο Λύκειο είναι τα εξής:

- Παρουσιάζονται ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Θαλή
- Στην απόδειξή τους εμπλέκεται, εκτός από την ιδέα της αναλογίας ευθυγράμμων τμημάτων και η τριάδα διχοτόμος-παράλληλες-ισοσκελές, μια τριάδα που απαντάται και σε πολλές ασκήσεις του κεφαλαίου για τις παράλληλες ευθείες.
- Οδηγούν στο συμπέρασμα ότι όταν είναι γνωστά τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του ίχνους των διχοτόμων του τριγώνου.

Όμως, σε όλη την υπόλοιπη πορεία του μαθήματος, τα θεωρήματα φαίνονται να μην αξιοποιούνται πουθενά για την παραγωγή της νέας γνώσης (εμφανίζονται μονάχα σε ορισμένες σύνθετες ασκήσεις). Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα θεωρήματα διδάσκονται «εν τάχει» στη Β' Λυκείου, ως μέρος της ύλης της Α' Λυκείου που πρέπει να καλυφθεί τις πρώτες μέρες του σχολικού έτους, πιστεύουμε ότι συντελεί στην υποβάθμισή τους.

Οι διδάσκοντες στο Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου, καταθέτουμε μια εναλλακτική πρόταση για την διδασκαλία τους, με στόχο να εμπλέξουμε τους ίδιους τους μαθητές με τα θεωρήματα αυτά.

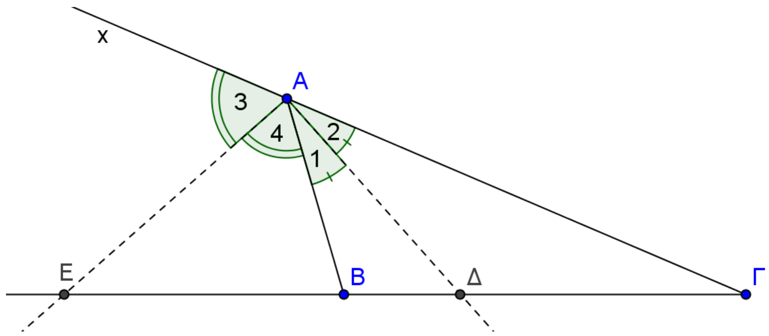
Προτείνουμε, να εισαχθούν τα δύο θεωρήματα με μία άσκηση στην παράγραφο «Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων», όπου διατυπώνεται και σχετική πρόταση για τον λόγο εμβαδών τριγώνων με ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες. Συγκεκριμένα προτείνουμε να δοθούν το σχήμα και τα ερωτήματα:

Άσκηση: Στο παρακάτω σχήμα, η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A_{εξ}}$ του ίδιου τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

I. $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$

II. $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{(ABE)}{(A\Gamma E)}$

III. Η ισότητα των λόγων $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$ είναι άμεση συνέπεια των I. και II., όπου γίνεται χρήση της έννοιας του εμβαδού. Μπορείτε να βρείτε μια εναλλακτική απόδειξη αυτής της ισότητας που να μην χρησιμοποιεί καθόλου την έννοια του εμβαδού; (ούτε έμμεσα ούτε άμεσα).



Εντοπίζουμε τα εξής πλεονεκτήματα αυτής της προσέγγισης:

1. Ο καθηγητής έγκαιρα θα ξεκινήσει τη διδασκαλία της ύλης της Β' Λυκείου, «κερδίζοντας» χρόνο για την καθαυτή διδακτέα ύλη της Β' Λυκείου, πριν την διεξαγωγή του διαγωνίσματος Α' Τετραμήνου. Αυτό μειώνει το προσωπικό του άγχος, αλλά και των μαθητών του.
2. Με έντεχνο τρόπο, τα δύο θεωρήματα διχοτόμων εισάγονται στην ύλη της Β' Λυκείου, ως μια απλή άσκηση.
3. Στα ερωτήματα Ι και ΙΙ της άσκησης, συνδέονται οι λόγοι των τμημάτων με λόγους εμβαδών.
4. Το ερώτημα ΙΙΙ, έρχεται ως πρόκληση, ώστε οι μαθητές να θυμηθούν, μετά από καιρό, το θεώρημα του Θαλή και την εμφάνιση της τριάδας διχοτόμος-παράλληλες-ισοσκελές. Αποτελεί δηλαδή ένα είδος επανάληψης.
5. Εφόσον τα θεωρήματα παρουσιάζονται σε μια χρονική στιγμή μετά το διαγώνισμα Α' Τετραμήνου, υπάρχει η άνεση χρόνου να συζητηθούν ερωτήματα όπως:
    a. Μπορούμε να προσδιορίσουμε την θέση των ιχνών των διχοτόμων του τριγώνου, όταν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του;
    b. Διερευνήστε, πότε η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}_{\varepsilon\xi}}$ (εξωτερική διχοτόμος) του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΒΓ;
    c. Διερευνήστε, πότε η τομή Ε της εξωτερική διχοτόμου (εφόσον υπάρχει) βρίσκεται στην προέκταση του ΓΒ και πότε στην προέκταση του ΒΓ;

Τέλος, παραθέτουμε και την αναμενόμενη λύση στα ερωτήματα Ι και ΙΙ της άσκησης:

Λύση:

Ι. Εφόσον τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}_1} = \widehat{\mathrm{A}_2}$ (η ΑΔ είναι διχοτόμος), θα ισχύει ότι $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$ (1).

Όμως, έχουν και παραπληρωματικές τις $\widehat{\Delta}$ γωνίες, αφού $\widehat{\mathrm{A\Delta B}} + \widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} = 2$ ορθές. Συνεπώς και $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \frac{\mathrm{\Delta B}\cdot\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{\Delta B}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

ΙΙ. Εφόσον τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{\mathrm{E}}$ θα ισχύει ότι $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB}}{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{E\Gamma}}$ (3).

Όμως, επειδή $\widehat{\mathrm{A}_3} = \widehat{\mathrm{A}_4}$ (η ΑΕ είναι διχοτόμος) και $\widehat{\mathrm{A}_4} + \widehat{\mathrm{EA\Gamma}} = 2$ ορθές, έπεται ότι $\widehat{\mathrm{A}_3} + \widehat{\mathrm{EA\Gamma}} = 2$ ορθές, δηλαδή τα τρίγωνα έχουν και παραπληρωματικές τις γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$. Συνεπώς, $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει το ζητούμενο. □

Οι Μαθηματικοί του Πειραματικού Λυκείου Ηρακλείου