ΤΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Ο ΜΥΘΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΟΥΣ

Του Δημήτρη Καλυκάκη

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα είναι, σύμφωνα με τους ειδικούς, το αρχαιότερο ίσως πρόβλημα μεγιστοποίησης, που με απλά λόγια λέει το εξής: *Από όλες τις καμπύλες του επιπέδου που έχουν το ίδιο μήκος, αυτή που περικλείει χωρίο με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν είναι ο κύκλος.* Η παράδοση συνδέει το πρόβλημα αυτό με το μύθο της Διδούς, της βασίλισσας της Καρχηδόνας, που τοποθετείται περίπου στον 9^{ο} π.Χ. αιώνα, και που ο Βιργίλιος διασώζει στο επικό του ποίημα την *Αινειάδα*.

Ας δούμε όμως ποιος ήταν ο Βιργίλιος και ποιος ο μύθος της Διδούς.

1. Η ΑΙΝΕΙΑΔΑ ΤΟΥ ΒΙΡΓΙΛΙΟΥ ΚΑΙ Ο ΜΥΘΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΟΥΣ

Ο Βιργίλιος – Publius Vergilius Maro (70π.Χ. - 19π.Χ.) είναι ο εθνικός ποιητής των Ρωμαίων και η *Αινειάδα* του (Aeneis) θεωρείται κλασσικό έργο όχι μόνο της ρωμαϊκής αλλά και ολόκληρης της ευρωπαϊκής λογοτεχνίας, το οποίο αντιτάσσεται στα ποιήματα του Ομήρου. Αποτελείται από δώδεκα βιβλία και είναι γραμμένο σε λατινικούς εξάμετρους στίχους. Θέμα του έργου είναι η αναχώρηση του Αινεία – του μυθικού γενάρχη των Ρωμαίων - από την Τροία, οι πολυτάραχες περιπλανήσεις του στη Μεσόγειο και η περιπετειώδης εγκατάστασή του στο Λάτιο της Ιταλίας.

Όπως αναφέρει ο Βιργίλιος στο πρώτο βιβλίο της *Αινειάδας*, κατά την διάρκεια των περιπλανήσεων του Αιναία πριν την εγκατάστασή του στο Λάτιο, κάποια στιγμή φθάνει στις ακτές της Βόρειας Αφρικής, στην Καρχηδόνα της οποίας βασίλισσα είναι η Διδώ, μια πριγκίπισσα με καταγωγή από την Τύρο της Φοινίκης. Πώς είχε όμως βρεθεί η Διδώ από τη Τύρο στη Καρχηδόνα; Σύμφωνα με το μύθο, προσπαθώντας να ξεφύγει από την καταδίωξη του αδερφού της και βασιλιά της Τύρου, η πριγκίπισσα Διδώ αναχώρησε δυτικά παραπλέοντας τις ακτές της Μεσογείου, σε αναζήτηση ασύλου. Μια τοποθεσία στο κόλπο της Τύνιδας τράβηξε την προσοχή της. Η Διδώ ήρθε σε διαπραγμάτευση με τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα για να αγοράσει γη, περιορίζοντας στο ελάχιστο τις απαιτήσεις της. Δεν ζητούσε παρά μόνο όση έκταση μπορούσε να κυκλωθεί με το δέρμα ενός ταύρου. Η Διδώ κατάφερε να πείσει τον Ιάρβα και η συμφωνία κλείστηκε. Τότε η πονηρή πριγκίπισσα τεμάχισε την προβιά ενός ταύρου σε λεπτές λωρίδες, τις έδεσε τη μία με την άλλη φτιάχνοντας ένα πολύ μακρύ δερμάτινο σκοινί, με το οποίο κύκλωσε μια μεγάλη έκταση γης όπου έκτισε ένα φρούριο, το οποίο ονομάστηκε Βύρσα (=δέρμα), και κοντά του την πόλη της Καρχηδόνας.

Από αυτόν τον μύθο της Διδούς, που διασώζει ο Βιργίλιος στην *Αινειάδα*, ανακύπτει το εξής γεωμετρικό πρόβλημα, γνωστό έκτοτε ως Πρόβλημα της Διδούς ή Κλασσικό Ισοπαραμετρικό Πρόβλημα: *Πως έπρεπε να τοποθετήσει πάνω στη γη η Διδώ το δερμάτινο σκοινί που έφτιαξε ώστε να περικλείει στο εσωτερικό του τη μεγαλύτερη δυνατή έκταση;* Και η απάντηση, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, είναι ότι η Διδώ έπρεπε να τοποθετήσει το δερμάτινο σκοινί με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει σχήμα κύκλου.

Από τη διατύπωση που υπάρχει στην *Αινειάδα* φαίνεται πως η Διδώ έλυσε σωστά το πρόβλημα, αφού ο Βιργίλιος χρησιμοποιεί τη λέξη circumdare που σημαίνει κυκλώνω και η οποία περιέχει τη ρίζα circus (=κύκλος). Επί λέξει, ο Βιργίλιος αναφέρει: «mercatique solum, facti de nomine Byrsam, taurino quantum possent circumdare tergo» (Aeneis I, 367-368) δηλαδή: «και αγόρασαν έδαφος, που ονομάστηκε Βύρσα από αυτό το γεγονός, όσο μπορούσαν να κυκλώσουν με δέρμα ταύρου».

2. ΤΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Η διατύπωση λοιπόν του (κλασσικού) ισοπεριμετρικού προβλήματος έχει ως εξής:

ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Από όλες τις απλές, κλειστές καμπύλες του επιπέδου με δοσμένο μήκος, εκείνη που περικλείει το μέγιστο εμβαδόν είναι ο κύκλος και μόνον αυτός.*

Όμως, το εμβαδόν E του κύκλου περιμέτρου λ είναι ίσο με $\frac{\lambda^2}{4\pi}$. Συνεπώς το ισοπεριμετρικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα μέσω μιας ανισοτικής σχέσης μεταξύ εμβαδού και μήκους, γνωστής με τον όρο: ισοπεριμετρική ανισότητα.

ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ. *Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείει μία απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη μήκους λ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$E \leq \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι ο κύκλος περιμέτρου λ.

Μία επίπεδη καμπύλη λέμε ότι είναι απλή εάν δεν έχει αυτοτομές. Για παράδειγμα, ο κύκλος είναι μια απλή καμπύλη, ενώ η καμπύλη που χρησιμοποιούμε για το σύμβολο του αριθμού οχτώ δεν είναι απλή. Η απλές καμπύλες έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα: αποσυνθέτουν το επίπεδο σε τρία διακεκριμένα μέρη. Το πρώτο είναι η καμπύλη αυτή καθ'αυτή, το δεύτερο είναι το εσωτερικό της καμπύλης που είναι ένα φραγμένο, συνεκτικό υποσύνολο του επιπέδου και είναι αυτό που στη διατύπωση του ισοπεριμετρικού προβλήματος καλείται «*χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη*» και το τρίτο είναι το εξωτερικό της καμπύλης, που είναι μη-φραγμένο και συνεκτικό. Η κατάσταση αυτή είναι εποπτικά ξεκάθαρη στη περίπτωση του κύκλου.

Η παλαιότερη απόδειξη για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα που γνωρίζουμε αποδίδεται στον Έλληνα μαθηματικό Ζηνόδωρο (200 π.Χ. –140 π.Χ.), ο οποίος απέδειξε την εξής πρόταση: *Αν υπάρχει ένα ν-γωνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των ν-γώνων με δοθείσα περίμετρο, τότε αυτό πρέπει να είναι κανονικό ν-γωνο.* Θεώρησε όμως δεδομένη την ύπαρξη ενός ν-γώνου με μέγιστο εμβαδόν, δεν την απέδειξε. Μετά τον Ζηνόδωρο, ουσιαστικά, η εξέλιξη του προβλήματος συνεχίζεται με τον Ελβετό μαθηματικό Jakob Steiner (1796-1863). Παρ' όλο που ο Steiner βρήκε μια απλή απόδειξη για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, άφησε εντούτοις ένα κενό: την απόδειξη ύπαρξης της λύσης. Οι πρώτες αυστηρές αποδείξεις δόθηκαν από το Γερμανό μαθηματικό Karl Weierstrass (1815-1897) μέσω της Θεωρίας Λογισμού Μεταβολών και από τους Γερμανούς μαθηματικούς Herman Amandus Schwartz (1843-1921) και Wilhelm Blaschke (1885-1962) στις αρχές του 20ου αιώνα.

Μεγάλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν και έδωσαν τις δικές τους αποδείξεις για την ισοπεριμετρική ανισότητα χρησιμοποιώντας τεχνικές της διαφορικής γεωμετρίας ή της αρμονικής ανάλυσης. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο ακολουθεί τη σκέψη του Ζηνόδωρου και του Steiner και είναι προσιτή από ένα μαθητή λυκείου εκτός ίσως την απόδειξη της ύπαρξης της λύσης που χρησιμοποιεί ένα επιχείρημα συμπάγειας, κατανοητό όμως από κάθε δευτεροετή φοιτητή ενός μαθηματικού τμήματος.

3. Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε την απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας από την οπτική γωνία του Ζηνόδωρου και του J. Steiner. Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας περνάει μέσα από το ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Ο βηματισμός μας θα είναι επαγωγικός: από τα τρίγωνα στα πολύγωνα και από εκεί στις απλές κλειστές καμπύλες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. (Η ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ) *Για κάθε τρίγωνο με εμβαδόν Ε και περίμετρο λ ισχύει:.*

$$E \leq \frac{\lambda^2}{12\sqrt{3}}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ένα τυχαίο τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ. Τότε, από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε,

$$E = \sqrt{\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2} - \alpha\right)\left(\frac{\lambda}{2} - \beta\right)\left(\frac{\lambda}{2} - \gamma\right)},$$

όπου $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$. Επίσης, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, είναι,.

$$\left(\frac{\lambda}{2} - \alpha\right)\left(\frac{\lambda}{2} - \beta\right)\left(\frac{\lambda}{2} - \gamma\right) \leq \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\lambda}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\lambda}{2} - \gamma\right)}{3}\right]^3 = \left(\frac{\lambda}{6}\right)^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας με $\frac{\lambda}{2}$, παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες και λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο του Ήρωνα, προκύπτει η ζητούμενη σχέση. Η ισότητα ισχύει όταν ισχύει η ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου παραπάνω, δηλαδή αν και μόνο αν $\frac{\lambda}{2} - \alpha = \frac{\lambda}{2} - \beta = \frac{\lambda}{2} - \gamma$ ή ισοδύναμα $\alpha = \beta = \gamma$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

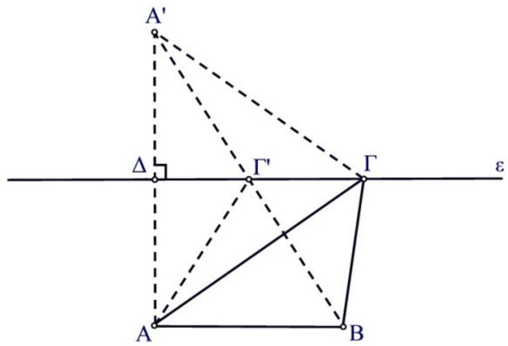
Η παραπάνω πρόταση είναι ειδική περίπτωση (για $\nu = 3$) του παρακάτω γενικότερου αποτελέσματος: *Αν Ε είναι το εμβαδόν και λ η περίμετρος ενός οποιουδήποτε ν-γώνου τότε* $E \leq \frac{\lambda^2}{4\nu\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}$. *Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το ν-γωνο είναι κανονικό.* (Πόρισμα 1 παρακάτω) Το επόμενο αποτέλεσμα αποδίδεται, εκτός από το σκέλος α), στον Ζηνόδωρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Αν υπάρχει ένα ν-γωνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των ν-γώνων με δοσμένη περίμετρο, τότε αυτό πρέπει α) να είναι κυρτό, β) να έχει ίσες πλευρές και γ) να έχει ίσες γωνίες, δηλαδή να είναι κανονικό.*

Για την απόδειξη της θεωρήματος 2 θα χρειαστούμε τα παρακάτω δύο λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 1. *Απ' όλα τα τρίγωνα ΑΒΓ με σταθερή βάση ΑΒ και εμβαδόν Ε, το ισοσκελές έχει την ελάχιστη περίμετρο.*

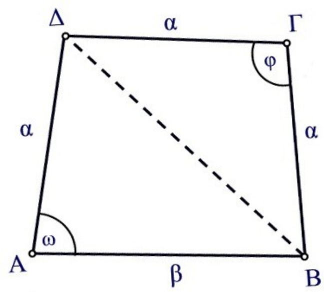
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όλα αυτά τα τρίγωνα, αφού έχουν σταθερή βάση και εμβαδόν, θα έχουν το ίδιο ύψος, συνεπώς η κορυφή *Γ* θα κείται σε μία ευθεία *ε* παράλληλη προς τη βάση *ΑΒ* σε απόσταση $\frac{E}{|AB|}$.



Αν *Α΄* είναι το συμμετρικό του *Α* ως προς την ευθεία *ε* και *Δ*, *Γ΄* τα σημεία που τέμνουν τα ευθύγραμμα τμήματα *ΑΑ΄* και *ΒΑ΄* αντίστοιχα την ευθεία *ε*, τότε *ΑΓ΄=Γ΄Α΄* και *ΑΓ΄=Γ΄Β* αφού, *∠ΒΑΓ΄=∠ΑΓ΄Δ=∠ΔΓ΄Α΄=∠ΒΓ΄Γ =∠Γ΄ΒΑ*. Άρα, *ΑΓ + ΓΒ = Α΄Γ + ΓΒ≥ Α΄Β = Α΄Γ΄ + Γ΄Β = ΑΓ΄+Γ΄Β*. Επομένως το ισοσκελές τρίγωνο *ΑΒΓ΄* έχει την ελάχιστη περίμετρο.

ΛΗΜΜΑ 2. *Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ =α και ΑΒ =β. Το εμβαδόν Ε του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο, όταν τούτο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω *ω* η γωνία *ΒΑΔ* και *φ* η γωνία *ΒΓΔ*. Αρκεί να δειχθεί ότι *ω+φ=π*. Αφού Εμβ(*ΑΒΔ*) $=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\omega$ και Εμβ(*ΒΓΔ*) $=\frac{1}{2}\alpha^2\eta\mu\varphi$, έπεται



$$\frac{2\cdot E}{\alpha}=\beta\eta\mu\omega+\alpha\eta\mu\varphi \qquad (1)$$

Επίσης, από τον τύπο του συνημιτόνου για την πλευρά ΒΔ έπεται

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\omega=2\alpha^2-2\alpha^2\sigma\upsilon\nu\varphi=B\Delta^2$$

οπότε,

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha}=\beta\sigma\upsilon\nu\omega-\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (2)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις σχέσεις (1) και (2) και προσθέτοντας έχουμε,

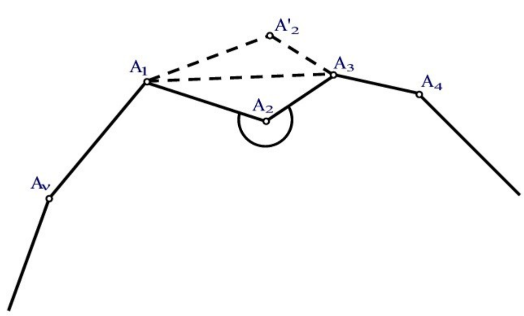
$$\left(\frac{2E}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha}\right)=\beta^2+\alpha^2+2(\eta\mu\omega\cdot\eta\mu\varphi-\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi)\alpha\beta$$

ή ισοδύναμα,.

$$\left(\frac{2E}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha}\right)=\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu(\omega+\varphi).$$

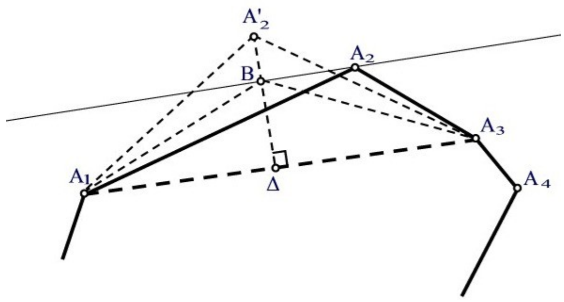
Τα μεγέθη *α, β* είναι σταθερά, συνεπώς το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο αν και μόνο αν το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας είναι μέγιστο, δηλαδή όταν $\sigma\upsilon\nu(\omega+\varphi)=-1$ ή ισοδύναμα, όταν $\omega+\varphi=\pi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2. Έστω $A_1A_2\ldots A_\nu$ ένα ν-γωνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των ν-γώνων με δοσμένη περίμετρο.



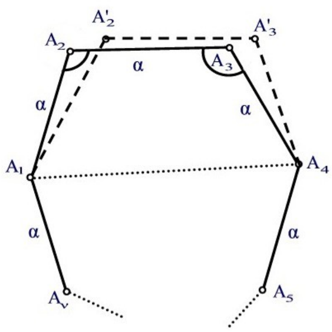
α) Ας υποθέσουμε ότι δεν ήταν κυρτό. Τότε κάποια γωνία, έστω η $A_1A_2A_3$, θα ήταν μεγαλύτερη από 180^o. Αν A_2' είναι το συμμετρικό σημείο του A_2 ως προς την ευθεία A_1A_3, τότε το ν-γωνο $A_1A_2'A_3\ldots A_\nu$ έχει την ίδια περίμετρο με το αρχικό αλλά μεγαλύτερο εμβαδόν, πράγμα άτοπο ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού. Άρα, το ν-γωνο είναι κυρτό.

β) Έστω A_1A_2 και A_2A_3 δύο διαδοχικές πλευρές που είναι άνισες μεταξύ τους. Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από το A_2 και είναι παράλληλη στην πλευρά A_1A_3 (δες σχήμα). Αν Β είναι το σημείο της ευθείας ε με $BA_1 = BA_3$, τότε τα τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και A_1BA_3 έχουν το ίδιο εμβαδόν, αφού έχουν κοινή βάση και το ίδιο ύψος, αλλά $A_1B+BA_3<A_1A_2+A_2A_3$, βάση του λήμματος 1. Συνεπώς αν μετατοπίσουμε το σημείο Β κατάλληλα προς την κατεύθυνση που είναι κάθετη προς την ευθεία ε, μπορούμε να λάβουμε σημείο A_2' ώστε $A_1A_2'+A_2'A_3=A_1A_2+A_2A_3$.



Τότε όμως Εμβ$(A_1A_2'A_3)$>Εμβ$(A_1A_2A_3)$, αφού έχουν κοινή βάση και άνισα ύψη. Κατασκευάσαμε, συνεπώς, ν-γωνο $A_1A_2'A_3\ldots A_\nu$ με περίμετρο ίση με του ν-γώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$ αλλά με μεγαλύτερο εμβαδόν, πράγμα άτοπο ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού. Άρα, όλες οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους.

γ) Έστω ότι υπάρχουν δύο διαδοχικές γωνίες που είναι άνισες, ας πούμε αυτές των κορυφών A_2 και A_3. Από το β), ήδη γνωρίζουμε ότι $A_1A_2=A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_1A_\nu =α$. Το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ δεν είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού οι γωνίες A_2 και A_3 δεν είναι ίσες. Οπότε, από το λήμμα 2, αν $A_1A_2'A_3'A_4$ είναι το εγγράψιμο τετράπλευρο με $A_1A_2' = A_2'A_3'= A_3'A_4 = α$ τότε, το ν-γωνο $A_1A_2'A_3'A_4\ldots A_\nu$ έχει την ίδια περίμετρο με το $A_1A_2\ldots A_\nu$ αλλά μεγαλύτερο εμβαδόν, πράγμα άτοπο ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού. Άρα, όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.



ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Αν E είναι το εμβαδόν και λ η περίμετρος ενός κανονικού ν-γώνου, τότε

$$E = \frac{\lambda^2}{4\nu\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως είναι γνωστό, η περίμετρος λ ενός κανονικού ν-γώνου δίδεται από τον τύπο $\lambda = 2\nu R \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, ενώ το εμβαδόν E από τον τύπο $E = \frac{r\cdot\lambda}{2}$, όπου r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Όμως, $r = R\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$, συνεπώς $E = \frac{\lambda^2}{4\nu\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *Υπάρχει ν-γωνο του επιπέδου το οποίο έχει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των ν-γώνων με δοσμένη περίμετρο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επαγωγή ως προς ν. Για ν = 3 το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα 1. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για τα πολύγωνα με πλήθος πλευρών μικρότερο ή ίσο του ν-1. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ν-γωνο μέγιστου εμβαδού μεταξύ των ν-γώνων με δοσμένη περίμετρο λ. Επειδή αν υπάρχει τέτοιο ν-γωνο πρέπει να είναι κυρτό, θα περιοριστούμε στη κλάση των κυρτών ν-γώνων.

Ένα ν-γωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ καθορίζεται από τις ν το πλήθος κορυφές του $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, …, $A_\nu(x_\nu,y_\nu)$, δηλαδή από τους 2ν αριθμούς x_1, y_1, x_2, y_2, …, x_ν, y_ν. Για το λόγο αυτό θα δουλέψουμε στο $R^{2\nu}$ κάθε σημείο του οποίου στο εξής θα το αντιλαμβανόμαστε ως μία ν-άδα σημείων του επιπέδου.

Το εμβαδόν κάθε κυρτού ν-γώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, …, $A_1A_{\nu-1}A_\nu$. Συνεπώς, το εμβαδόν Ε του ν-γώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$ με $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, …, $A_\nu(x_\nu,y_\nu)$ δίδεται από το τύπο

$$E(x_1,y_1,\ldots,x_v,y_v)=\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{v}\left|\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_{i-1} & y_{i-1} & 1\\ x_i & y_i & 1\end{pmatrix}\right|$$

ο οποίος ορίζει για συνεχή συνάρτηση στο $R^{2\nu}$.

Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας όχι σε ολόκληρο το $R^{2\nu}$ αλλά σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολό του Κ που καθορίζεται από τις παρακάτω τέσσερις συνθήκες:

(α) Τα (x_1,y_1), (x_2,y_2), …, (x_ν,y_ν) είναι κορυφές κυρτού ν-γώνου.

(β) $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\cdots+\sqrt{(x_{v-1}-x_v)^2+(y_{v-1}-y_v)^2}=\lambda$.

(γ) $(x_1,y_1) = (0,0)$

Η συνθήκη (γ) δεν περιορίζει το γεωμετρικό ζητούμενο της προς απόδειξη πρότασης, δεδομένου ότι τόσο το μήκος όσο και το εμβαδόν είναι γεωμετρικά μεγέθη που παραμένουν αναλλοίωτα από τις μετατοπίσεις του επιπέδου. Συνεπώς, δεν περιορίζεται η γενικότητα εάν υποθέσουμε ότι η κορυφή A_1 του ν-γώνου ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων του επιπέδου.

Η τέταρτη συνθήκη που θα θέσουμε έχει τεχνικό χαρακτήρα και τίθεται για τον αποκλεισμό περιπτώσεων εκφυλισμού. Για τη διατύπωσή της επιλέγουμε αυθαίρετα έναν αριθμό α μεταξύ του εμβαδού του κανονικού (ν-1)-γώνου και του εμβαδού του κανονικού ν-γώνου, περιμέτρου λ. Δηλαδή,

$$\frac{\lambda^2}{4(\nu-1)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{\nu-1}\right)}<\alpha<\frac{\lambda^2}{4\nu\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}$$

Η τέταρτη συνθήκη περιορίζει τα ν-γωνα σε αυτά που έχουν εμβαδόν τουλάχιστον α:

(δ) $E(x_1,y_1,\ldots,x_v,y_v)\geq\alpha$

Το σύνολο Κ είναι προφανώς μη-κενό, αφού περιέχει το κανονικό ν-γωνο. Το σύνολο Κ είναι επίσης κλειστό και φραγμένο. Το ότι είναι φραγμένο είναι άμεση συνέπεια των συνθηκών (β) και (γ). Το να είναι το σύνολο Κ κλειστό σημαίνει ότι αν μια ακολουθία ν-γώνων $P_1,P_2,\ldots P_\kappa,\ldots$ πληρεί τις συνθήκες (α), (β), (γ), (δ) και συγκλίνει σε ένα ν-γωνο Ρ, τότε το Ρ πληρεί τις συνθήκες (α), (β), (γ), (δ). Η σύγκλιση των ν-γώνων $P_\kappa = A_1^{(\kappa)}A_2^{(\kappa)}\ldots A_\nu^{(\kappa)}$, κ=1,2,… στο $P = A_1A_2\ldots A_\nu$ νοείται με την έννοια ότι $A_1^{(\kappa)}\to A_1$, $A_2^{(\kappa)}\to A_2$, …, $A_\nu^{(\kappa)}\to A_\nu$ καθώς $\kappa\to+\infty$, ως σημεία του επιπέδου.

Γνωρίζομε ότι το όριο διατηρεί τις ισότητες και τις ανισο-ισότητες. Επομένως, το οριακό ν-γωνο P, πληρεί τις συνθήκες (β), (γ), (δ) και το μισό της συνθήκης (α), τη κυρτότητα, αφού ένα πολύγωνο είναι κυρτό αν κάθε γωνία του είναι $\leq \pi$. Αυτό που μένει είναι να δειχθεί ότι το P είναι όντως ν-γωνο, δηλαδή ότι τα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι ανά δύο διαφορετικά. Μια τέτοια όμως περίπτωση εκφυλισμού αποκλείεται από τη συνθήκη (δ). Πράγματι, ας υποθέσομε ότι $A_1 \equiv A_2$ ενώ όλες οι άλλες κορυφές είναι ανά δύο διαφορετικές. Τότε, δεν έχουμε ν-γωνο αλλά (ν-1)-γωνο, το $A_1A_3A_4\ldots A_\nu$, που εξακολουθεί, λόγω συνθήκης (β), να έχει περίμετρο λ. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει (ν-1)-γωνο μέγιστου εμβαδού, το οποίο, από θεώρημα 2, είναι αναγκαστικά το κανονικό (ν-1)-γωνο. Άρα,

$$\mathrm{E}(A_1A_3A_4 \ldots A_\nu) \leq \frac{\lambda^2}{4(\nu-1)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{\nu-1}\right)} < \alpha.$$

Όμως, $\mathrm{E}\left(A_1^{(\kappa)}A_2^{(\kappa)} \ldots A_\nu^{(\kappa)}\right) \geq \alpha$, για κάθε κ=1,2,…. Παίρνοντας όρια, καθώς $\kappa \to +\infty$, έπεται $\mathrm{E}(A_1A_3A_4 \ldots A_\nu) \geq \alpha$, που αντιφάσκει στην παραπάνω ανισότητα. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις μπορεί να αποκλειστούν με παρόμοια επιχειρηματολογία.

Την απόδειξη ολοκληρώνει το θεώρημα του Weierstrass, το οποίο εγγυάται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου πεπερασμένης διάστασης, λαμβάνει μέγιστη τιμή.

Τα θεωρήματα 2 και 3 μπορούν συνοπτικά να αναδιατυπωθούν ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. *Απ' όλα τα ν-γωνα με σταθερή περίμετρο λ, το κανονικό ν-γωνο, και μόνο αυτό, έχει το μέγιστο εμβαδόν.*

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης και του θεωρήματος 4 είναι το παρακάτω αποτέλεσμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. (Η ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ν-ΓΩΝΑ) *Αν E είναι το εμβαδόν και λ η περίμετρος ενός οποιουδήποτε ν-γώνου τότε ,*

$$E \leq \frac{\lambda^2}{4\nu\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το ν-γωνο είναι κανονικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4 και της πρότασης 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. *Αν E είναι το εμβαδόν και λ η περίμετρος ενός οποιουδήποτε ν-γώνου, τότε*

$$E \leq \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση συνέπεια του πορίσματος 1 και του γεγονότος ότι $\varepsilon\varphi\alpha \geq \alpha$, για κάθε $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Ένα από τα πλεονεκτήματα της τελευταίας ανισότητας είναι ότι οι σταθερές που περιέχει είναι ανεξάρτητες από το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία απλή, κλειστή καμπύλη μήκους λ που περικλείει εμβαδόν E. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία εγγεγραμμένων πολυγώνων P_ν, περιμέτρου λ_ν και εμβαδού E_ν, ν =1, 2, 3, … ώστε

$$\lambda_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} \lambda \text{ και } E_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} E$$

Όμως για τα πολύγωνα, από το πόρισμα 2, έχουμε

$$E_\nu \leq \frac{\lambda_\nu^2}{4\pi}, \text{ για κάθε } \nu = 1,2,3,\ldots$$

Αφήνοντας το ν να τείνει στο άπειρο, έχουμε τελικά

$$E \leq \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

Συνεπώς,

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. (ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ) *Το εμβαδόν E του χωρίου που περκλείει μία απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη μήκους λ ικανοποιεί την ανισότητα* $E \leq \frac{\lambda^2}{4\pi}$.

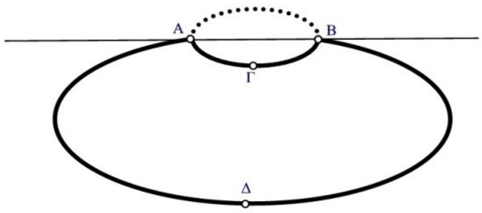
Ή ισοδύναμα,

το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από μια οποιαδήποτε απλή, κλειστή καμπύλη με δοσμένο μήκος δεν υπερβαίνει το εμβαδόν που περικλείει ένας κύκλος με περιφέρεια ίδιου μήκους.

Αυτό που μένει είναι να αποδείξουμε ότι η ισότητα στην ανισότητα του θεωρήματος 5 ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι κύκλος. Θα δείξουμε δηλαδή ότι αν μια απλή, κλειστή καμπύλη με δεδομένο μήκος περικλείει χωρίο με μέγιστο εμβαδόν, τότε αυτή πρέπει να είναι κύκλος. Η κεντρική ιδέα της απόδειξης που ακολουθεί οφείλεται στον J. Steiner.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. *Αν μία απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη περικλείει το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ όλων των απλών, κλειστών επίπεδων καμπυλών με δοσμένο μήκος, τότε:*
α) Αυτή πρέπει να είναι κυρτή,, δηλαδή το εσωτερικό της είναι κυρτό σύνολο.
β) Αν δύο σημεία Α, Β διαιρούν την καμπύλη σε δύο μέρη ίσου μήκους, τότε η χορδή ΑΒ διαιρεί το χωρίο που περικλείει η καμπύλη σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
γ) Έστω Α, Β δύο σημεία που διαιρούν την καμπύλη σε δύο μέρη ίσου μήκους. Αν το Γ είναι οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης, τότε η γωνία ΑΓΒ είναι ορθή. Δηλαδή η καμπύλη είναι κύκλος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. α) Αν δεν ήταν κυρτή τότε θα περιείχε δύο σημεία Α, Β τέτοια ώστε τα τόξα ΑΓΒ και ΑΔΒ που συνδέουν τα Α και Β να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας ΑΒ. Αντικαθιστώντας το τόξο ΑΓΒ με το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ΑΒ λαμβάνουμε μια νέα καμπύλη με το ίδιο μήκος αλλά με μεγαλύτερο εμβαδόν. Άτοπο, προς την ιδιότητα του μεγίστου εμβαδού.

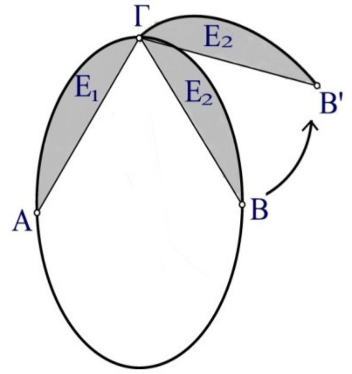


β) Αν η χορδή ΑΒ διαιρούσε το χωρίο σε δύο μέρη με άνισα εμβαδά, τότε το σχήμα

που θα εδημιουργείτο από το μέρος με το μεγαλύτερο εμβαδόν και το συμμετρικό του ως προς τη χορδή ΑΒ θα αντιπροσώπευε ένα σχήμα με ίση περίμετρο και μεγαλύτερο εμβαδόν. Άτοπο προς την ιδιότητα του μεγίστου εμβαδού.
Σημειώνουμε ότι τέτοια σημεία Α, Β που διχοτομούν μια απλή, κλειστή καμπύλη με πεπερασμένο μήκος πάντα υπάρχουν και δεν είναι βέβαια μοναδικά.

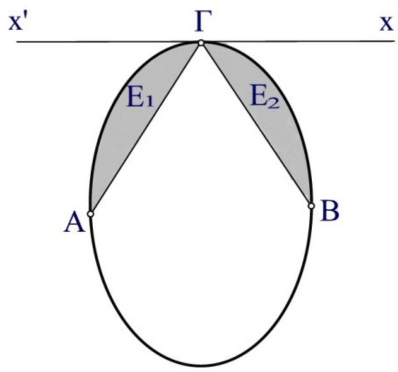
γ) Θα χρειαστούμε να έχουμε υπόψη μας ότι: *Μεταξύ όλων των τριγώνων ΑΒΓ που έχουν τις πλευρές ΓΑ και ΓΒ δοσμένου μήκους, το ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία την Γ, έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.* Τούτο είναι άμεση συνέπεια του τύπου: $\text{Εμβ}(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot |\text{ΓΑ}| \cdot |\text{ΓΒ}| \cdot |\text{ημΓ}|$.

Έστω ότι υπήρχε σημείο Γ της καμπύλης για το οποίο η γωνία ΑΓΒ δεν είναι ορθή. Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και το ευθύγραμμο τμήμα ΓΑ, και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και το ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ (δες σχήμα). Στρέφουμε το χωρίο E_2 γύρω από το σημείο Γ μέχρις ότου η γωνία ΑΓΒ΄ να γίνει ορθή. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΒ είναι μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΒ΄ και συνεπώς το νέο χωρίο ΑΓΒΆ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το χωρίο ΑΓΒΑ, ενώ το μήκος της νέας καμπύλης ΑΓΒ΄ είναι ίσο με το μήκος της καμπύλης ΑΓΒ.



Το σχήμα που θα διαμορφωθεί από το νέο χωρίο ΑΓΒΆ και το συμμετρικό του ως προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ θα έχει ίση περίμετρο με το αρχικό αλλά μεγαλύτερο εμβαδόν. Άτοπο, ως προς την ιδιότητα του μέγιστου εμβαδού.

Υπάρχει ένα σημείο που πρέπει να διασαφηνιστεί. Όλα όσα αναφέραμε ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι μετά τη στρέψη το νέο χωρίο με εμβαδόν E_2 δεν έχει κοινή επικάλυψη με το E_1. Τούτο είναι πράγματι αληθές διότι το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, λόγω α), είναι κυρτό και επομένως σε κάθε σημείο της καμπύλης, και άρα και στο Γ, υπάρχει ευθεία στήριξης x΄x η οποία αφήνει όλο το κυρτό σύνολο από τη μια πλευρά του (δες σχήμα). Συνεπώς το αν τα χωρία E_1, E_2 μετά από στρέψη περί το σημείο Γ αποκτήσουν κοινή επικάλυψη καθορίζεται από το πότε οι ημιευθείες Γx, Γx΄ θα συναντηθούν μετά την στρέψη περί το σημείο Γ. Αν λοιπόν η ημιευθεία Γx΄ παραμένει σταθερή τότε η ημιευθεία Γx έχει ένα περιθώριο 180^o, περιστρεφόμενη περί το Γ αντιωρολογιακά, για να συναντήσει την Γx΄, δηλαδή πολύ περισσότερο από ότι χρησιμοποιήσαμε στην επιχειρηματολογία μας. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη.



ΣΧΟΛΙΟ: Τα σκέλη α) και β) απασχόλησαν την ελληνική μαθηματική κοινότητα το 1983 ως θέματα στο Πανελλήνιο Διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε. για τη Β΄ Λυκείου.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι άμεση συνέπεια των θεωρημάτων 5 και 6.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. (ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΑΠΛΕΣ, ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ) *Το εμβαδόν Ε που περικλείει μια απλή, κλειστή επίπεδη καμπύλη μήκους λ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$E \leq \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η καμπύλη είναι ο κύκλος περιμέτρου λ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Π. Πάμφιλου, *Γεωμετρία*, Τροχαλία, 1989
2. Μ. Κατσοπρινάκης, Μ. Λάμπρου, *Ο Ευκλείδης Γ΄ σας απαντά*, Ευκλείδης Γ΄, τόμος 2, τεύχος 2(4), Σεπτ. 1984, σελ. 122-124.
3. *Θέματα Πανελλήνιου Διαγωνισμού Ε.Μ.Ε. 1983 Β΄ Λυκείου*, Ευκλείδης Β΄, τεύχος Σεπτ.-Οκτ. 1983, σελ. 12
4. V. M. Tikhomirov, *Stories about maxima and minima*, American Mathematical Society, 1990 (μετάφραση στα Ελληνικά από εκδόσεις Κάτοπτρο)
5. L. A. Lyusternik, *Convex figures and polyhedra*, D. C. Heath and Company, Univ. of Chicago, 1966
6. Pierre Grimal, *Λεξικό της Ελληνικής και Ρωμαϊκής Μυθολογίας*, Universityn Studio Press, Θεσσαλονίκη, 1991
7. H.J. Rose, Ιστορία της Λατινικής λογοτεχνίας, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1978

Δημήτρης Καλυκάκης
Ατλαντίδος 1, Ηράκλειο Κρήτης, Τ.Κ. 71305