

Από τον κύκλο στα κανονικά πολύγωνα με χαρτοδιπλωτική

της Ειρήνης Περυσινάκη

Όλοι αγαπάμε τη χαρτοδιπλωτική για τις όμορφες κατασκευές της. Εξασκούν τη δεξιότητά μας για ακριβείς διπλώσεις και απομνημόνευση μιας μεγάλης σειράς βημάτων, ενώ συγχρόνως μας ανταμοιβούν με το αισθητικό αποτέλεσμα και την έκφραση της δημιουργικότητάς μας.

Συνήθως βέβαια, αυτό που κάνουμε είναι μόνο να αναπαραγάγουμε τη «σοφία» του επινοητή μιας χαρτοκατασκευής και σπάνια επινοούμε εμείς κάτι νέο, πρωτότυπο. Κάπου ενδιάμεσα σε αυτά τα δύο - την αντιγραφή δηλαδή και την πρωτότυπη κατασκευή- βρίσκεται η «κατά παραγγελία κατασκευή». Μοιάζει με έναν γρίφο όπου κάποιος σου λέει «θέλω να κατασκευάσω αυτό» κι εσύ προσπαθείς να δεις με ποιο τρόπο μπορεί να γίνει η κατασκευή που ζητάει. Αυτό λοιπόν το άρθρο, αφορά μια «κατά παραγγελία κατασκευή», την ακόλουθη:

Η «κατά παραγγελία» κατασκευή

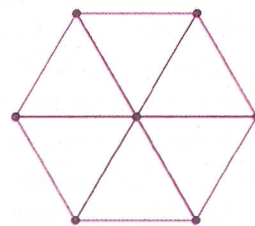
Έχοντας στη διάθεσή μας κυκλικά χαρτιά, θέλουμε να εγγράψουμε σε αυτά, με χαρτοδιπλωτική, είτε ένα τετράγωνο είτε ένα ισόπλευρο τρίγωνο είτε ένα κανονικό εξάγωνο.

Αν δεν έχετε κυκλικά χαρτιά στη διάθεσή σας, δημιουργήστε μόνοι σας σχεδιάζοντας το περίγραμμα ενός CD σε χαρτί και κόβοντάς το προσεκτικά με ψαλίδι (αν είναι χαρτί περιτυλίγματος προτιμήστε να έχει διαφορετικό χρώμα σε κάθε όψη για ένα «εφέ» διχρωμίας).

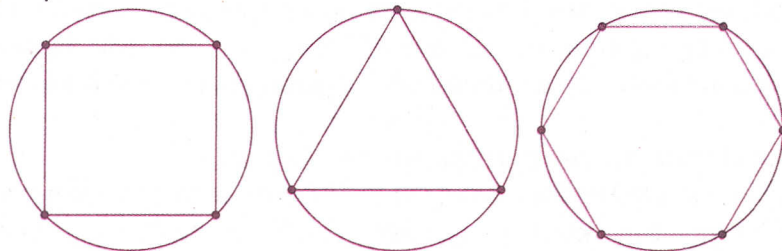
Για να καταλάβουμε το αίτημα της κατασκευής, θα πρέπει να δούμε ποιο είναι το «κανονικό εξάγωνο» (φαντάζομαι ότι δεν σας είναι άγνωστο το τετράγωνο ή το ισόπλευρο τρίγωνο) και να ξεκαθαρίσουμε τον όρο «εγγεγραμμένο». Οπότε:

- **Κανονικό** λέγεται το εξάγωνο που έχει ίσες πλευρές και ίσες γωνίες. Είναι απλό να δούμε ότι το κανονικό εξάγωνο διαιρείται σε έξι ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή -το κέντρο του κανονικού εξαγώνου- κάπως έτσι:

Εικόνα 1: ένα κανονικό εξάγωνο διαιρεμένο σε ισόπλευρα τρίγωνα



- **Εγγεγραμμένο σε κύκλο** είναι ένα πολύγωνο που οι κορυφές του ανήκουν στον κύκλο. Δοσμένου λοιπόν του κύκλου, θα πρέπει να σκεφτούμε πώς θα διπλώσουμε το κυκλικό χαρτί ώστε να πάρουμε πάνω-κάτω τα ακόλουθα:



Εικόνα 2: Εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα σε κύκλο

Οι ακριβείς κατασκευές της χαρτοδιπλωτικής

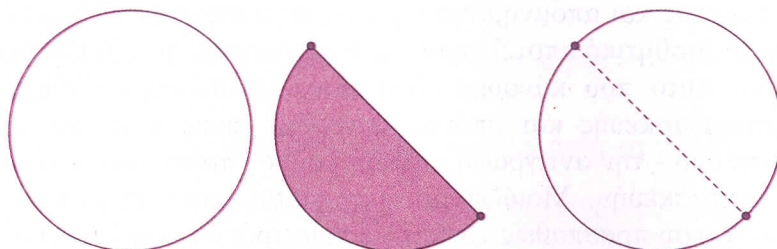
Φυσικά, δεν θέλουμε ένα περίπου σωστό σχήμα με διπλώσεις που φαίνονται σωστές αλλά

ίσως δεν είναι. Αντιθέτως θέλουμε με *ακρίβεια* να προσδιορίσουμε με διπλώσεις τις θέσεις των κορυφών των πολυγώνων στον κύκλο.

Για να καταλάβουμε την *ακρίβεια* στη χαρτοδιπλωτική ας δούμε δύο ερωτήματα:

Ερώτημα 1^ο: Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διάμετρο ενός κυκλικού χαρτιού με χαρτοδιπλωτική;

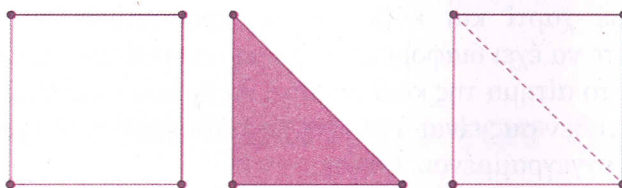
Η απάντηση έρχεται σχεδόν αυτόματα: Θα διπλώσουμε στη μέση το χαρτί ώστε το ένα μισό του να συμπέσει με το άλλο μισό. Ανοίγοντάς το ξανά, η δίπλωση θα είναι μια διάμετρος του κύκλου:



Εικόνα 3: Κατασκευή διαμέτρου κύκλου με χαρτοδιπλωτική

Ερώτημα 2^ο: Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαγώνιο ενός τετραγώνου χαρτιού με χαρτοδιπλωτική;

Και πάλι, φέρνοντας δύο απέναντι κορυφές την μία πάνω στην άλλη, ώστε το ένα μισό του τετραγώνου να πέσει πάνω στο άλλο μισό, θα έχουμε διπλώσει κατά μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου:



Εικόνα 4: Κατασκευή διαγωνίου τετραγώνου με χαρτοδιπλωτική

Γιατί οι παραπάνω κατασκευές είναι ακριβείς; Γιατί απλούστατα, με την ταύτιση του ενός μισού επάνω στο άλλο μισό του σχήματος, τσακίζουμε σε έναν **άξονα συμμετρίας** του. Η λίστα των ερωτημάτων θα μπορούσε να συνεχίζεται με την κατασκευή της διχοτόμου γωνίας (επίσης άξονας συμμετρίας της γωνίας), με την κατασκευή της μεσοκαθέτου ενός τμήματος (που και αυτή είναι άξονας συμμετρίας) κ.ά.

Επανερχόμαστε στο αρχικό μας αίτημα: «Δοσμένου ενός κυκλικού χαρτιού, πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο ή ένα εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο ή ένα εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο;» Θυμηθείτε ότι αρκεί να προσδιορίσουμε με *ακρίβεια*, τη θέση των κορυφών τους επάνω στον κύκλο.

Προτείνουμε στον αναγνώστη, προτού διαβάσει τις διαδικασίες των κατασκευών, να τις προσπαθήσει ο ίδιος μόνος του. Ίσως η πρώτη και η τρίτη κατασκευή να του φανούν απλές, όμως η δεύτερη, του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου, θα τον δυσκολέψει. Είναι ένα πρόβλημα που απαιτεί περίπου 1 ώρα για να λυθεί! **Χρειάζεται επιμονή και υπομονή!**

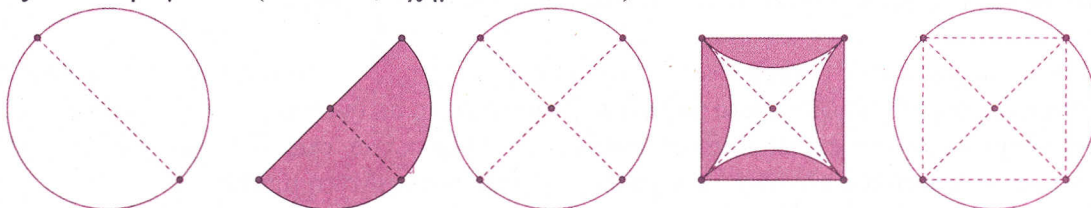
Η διαδικασία κατασκευής του εγγεγραμμένου τετραγώνου

Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθεί κανείς ότι οι διαγώνιοι στο εγγεγραμμένο τετράγωνο είναι δυο κάθετες διαμέτροι του κύκλου (εικόνα 5, 5^ο σχήμα). Ας ξεκινήσουμε λοιπόν κατασκευάζοντας πρώτα τις διαγωνίους του τετραγώνου και τέλος τις πλευρές του.

Βήμα 1^ο: Την κατασκευή μιας διαμέτρου τη συζητήσαμε ήδη στο πρώτο ερώτημα της προηγούμενης παραγράφου (εικόνα 3). Έτσι προσδιορίζονται δύο απέναντι κορυφές του τετραγώνου, τα άκρα της διαμέτρου (εικόνα 3, 3^ο σχήμα και εικόνα 5, 1^ο σχήμα).

Βήμα 2^ο: Μένει να κατασκευάσουμε και μια δεύτερη διάμετρο, κάθετη στην πρώτη. Πώς όμως; Ίσως να φέρουμε τη **μεσοκάθετο** της πρώτης διαμέτρου. Και επειδή η μεσοκάθετος ενός τμήματος είναι άξονας συμμετρίας του, για να κατασκευαστεί, φέρνουμε το ένα μισό του τμήματος επάνω στο άλλο μισό του. Στην περίπτωση μας, φέρνουμε τα άκρα της πρώτης διαμέτρου το ένα πάνω στο άλλο και τσακίζουμε (εικόνα 5, σχήματα 2^ο και 3^ο).

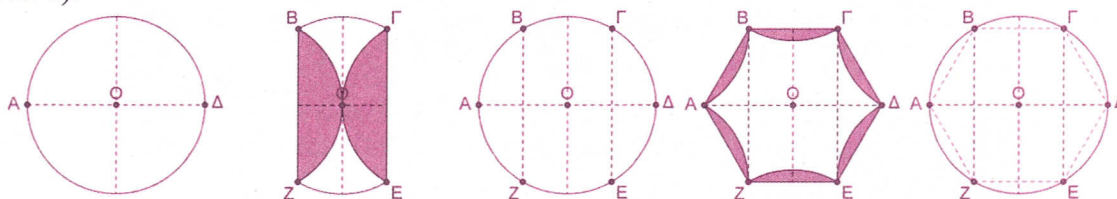
Βήμα 3^ο: Καθώς οι διάμετροι που κατασκευάσαμε είναι κάθετοι, οι τέσσερις γωνίες που σχηματίζονται είναι ορθές με κορυφή το κέντρο του κύκλου (σημείο τομής των διαμέτρων). Πρόκειται δηλαδή για ίσες επίκεντρες γωνίες που αναγκαστικά βαίνουν σε ίσα τόξα (τα τεταρτοκύκλια). Χωρίσαμε δηλαδή τον κύκλο σε **τέσσερα ίσα τόξα**. Τώρα είμαστε σε θέση να διπλώσουμε και τις χορδές των τόξων, που και αυτές θα είναι ίσες, ώστε να κατασκευάσουμε τις πλευρές του τετραγώνου (εικόνα 5, σχήματα 4^ο και 5^ο).



Εικόνα 5: τα βήματα της κατασκευής του εγγεγραμμένου τετραγώνου

Η διαδικασία κατασκευής του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου

Αυτή η κατασκευή είναι πραγματικά δυσκολότερη. Για να την επιτύχουμε, θα έχουμε στο μυαλό μας ότι το κανονικό εξαγώνο διαιρείται σε έξι ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή κορυφή (εικόνα 1).



Εικόνα 6: τα βήματα της κατασκευής του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου

Βήμα 1^ο: Κατασκευάζουμε διάμετρο ΑΔ και την κάθετη διάμετρο σε αυτή, ώστε να προσδιορίσουμε το κέντρο του κύκλου Ο (εικόνα 6, 1^ο σχήμα).

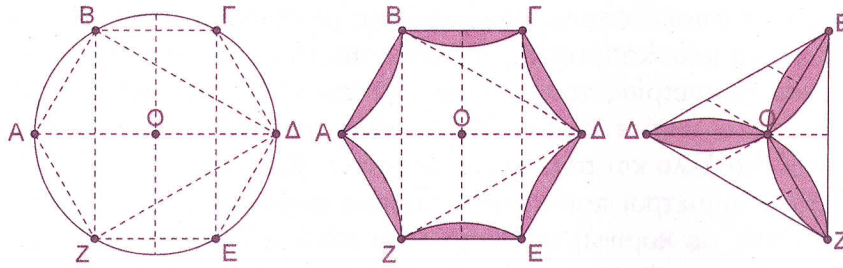
Βήμα 2^ο: Εάν φέρουμε τα σημεία Α και Δ επάνω στο κέντρο Ο και τσακίσουμε, θα έχουμε κατασκευάσει τις μεσοκαθέτους των τμημάτων ΑΟ και ΟΔ, έστω ΒΖ και ΓΕ αντίστοιχα (εικόνα 6, 2^ο και 3^ο σχήμα). Έτσι προσδιορίζονται οι υπόλοιπες τέσσερις κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα, ας αναλογιστούμε εάν πράγματι το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξαγώνο. Εφόσον το Β είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΟΑ, θα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή ΒΑ=ΒΟ. Επίσης, ΒΟ=ΑΟ ως ακτίνες κύκλου. Δηλαδή, το τρίγωνο ΟΑΒ έχει ίσες και τις τρεις πλευρές του, είναι επομένως ισόπλευρο. Το ίδιο αποδεικνύεται και για τα υπόλοιπα 5 τριγωνάκια ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΕ, ΟΕΖ και ΟΖΑ.

Βήμα 3^ο: Διπλώνοντας τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ και ΖΑ θα έχουμε κατασκευάσει και τις πλευρές του κανονικού εξαγώνου (εικόνα 6, 4^ο και 5^ο σχήμα).

Η διαδικασία κατασκευής του εγγεγραμμένου ισόπλευρου τριγώνου

Αν έχουμε κατασκευάσει το εγγεγραμμένο κανονικό εξαγώνο είναι πολύ απλό να κατασκευάσουμε και το εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο: απλώς επιλέγουμε μία-παρά-μία τις κορυφές του εξαγώνου για να γίνουν οι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου (το ΒΔΖ στην εικόνα 7, 1^ο και 2^ο σχήμα).



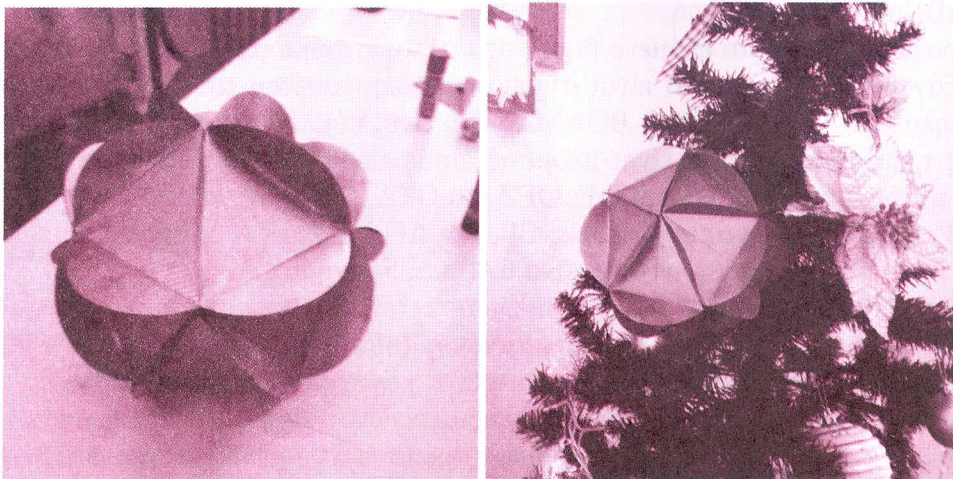
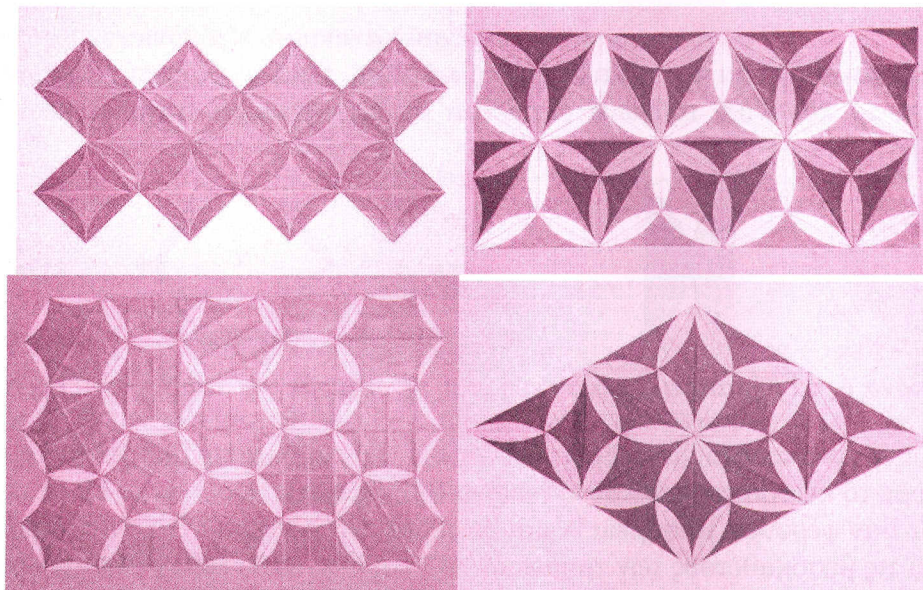
Εικόνα 7: από το κανονικό εξάγωνο στο ισόπλευρο τρίγωνο

Αν διπλώσουμε αντίθετα τις πλευρές τριγώνου από τις πλευρές του εξαγώνου, θα πάρουμε την εντυπωσιακή ψηφίδα που εικονίζεται στο 3^ο σχήμα της εικόνας 7.

Τα εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα ως ψηφίδες σε μωσαϊκά η ως έδρες σε στερεά

Ετοιμάστε πολλές ψηφίδες από χαρτιά περιτυλίγματος με διαφορετικό χρώμα στις δύο όψεις τους και δημιουργήστε εντυπωσιακές συνθέσεις. Παρακάτω σας δίνουμε κάποιες ιδέες με τέσσερα μωσαϊκά και ένα κανονικό εικοσάεδρο-χριστουγεννιάτικη μπάλα.

Καλή σας διασκέδαση!



Πηγή: «Κανονικά πολύγωνα και γρίφοι χαρτοδιπλωτικής» της Ειρήνης Περυσινάκη (http://users.sch.gr/iriniper/subjects/regular_polygons.html)