Γεωμετρικές ακροβασίες

1. Θεωρείστε το σύνολο των ζευγών (x, y) όλων των θετικών πραγματικών αριθμών x και y για τους οποίους ισχύει $x + y = \alpha = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$.

i) Βρείτε το ζεύγος για το οποίο η παράσταση xy παίρνει μέγιστη τιμή. Υπολογίστε τη μέγιστη αυτή τιμή.

ii) Βρείτε το ζεύγος εκείνο για το οποίο η παράσταση $x^2 + y^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή. Υπολογίστε την ελάχιστη αυτή τιμή.

2. Θεωρείστε το σύνολο των ζευγών (x, y) όλων των θετικών πραγματικών αριθμών x και y για τους οποίους ισχύει $xy = \beta^2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ με $\beta > 0$. Βρείτε το ζεύγος εκείνο για το οποίο η παράσταση $x + y$ παίρνει ελάχιστη τιμή και υπολογίστε την ελάχιστη αυτή τιμή.

Εκτέλεση

1.

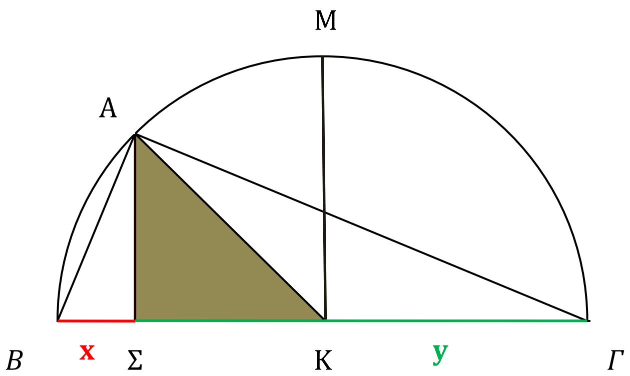
i)

Το «κατασκεύασμα» που θα επινοήσουμε θα πρέπει πρωταρχικά να υπακούει στο ότι οι x και y μπορεί να παίρνουν όλες τις τιμές στο διάστημα $[0, \alpha]$ και να ικανοποιούν τη σχέση $x + y = \alpha = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$.

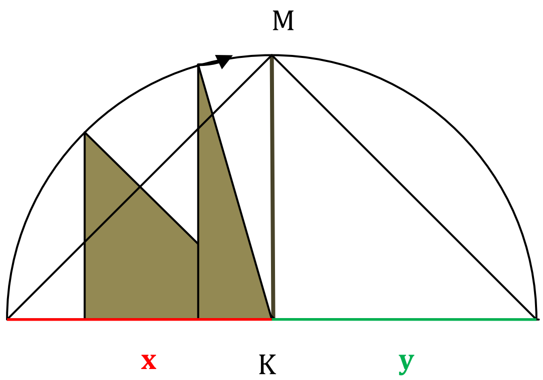
Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ μήκους α και πάνω σ' αυτό ένα σημείο Σ το οποίο κινείται από το Β στο Γ θέτοντας $(\mathrm{B\Sigma}) = x$ και $(\Gamma\Sigma) = y$, έχουμε ικανοποιήσει την παραπάνω απαίτηση.

Στην όλη όμως υπόθεση πρέπει κάπου να εμπλέξουμε και το γινόμενο $(\mathrm{B\Sigma}) \cdot (\Gamma\Sigma)$. Αυτό το γινόμενο δεν μπορεί να είναι μέτρο ενός ευθύγραμμου τμήματος, θα μπορούσε όμως να είναι το τετράγωνο του μέτρου ευθύγραμμου τμήματος. Το ευθύγραμμο αυτό τμήμα μπορεί να είναι το ύψος επί της υποτείνουσας ΒΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ και το ίχνος αυτού του ύψους να συμπίπτει με το σημείο Σ. Όσο τώρα το Σ κινείται, για να παραμένει η γωνία Α ορθή, θα πρέπει το σημείο Α να διαγράφει τόξο ημικύκλιου διαμέτρου ΒΓ και κέντρου Κ.

Έτσι φτάνουμε στο σχήμα



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $xy = (\mathrm{A\Sigma})^2 \leq (\mathrm{AK})^2 = (\mathrm{MK})^2$, όπου $\mathrm{MK} \perp \mathrm{B\Gamma}$. Δηλαδή $(xy)_{\max} = (\mathrm{MK})^2$ που συμβαίνει, όταν το Α συμπέσει με το Μ και το τρίγωνο ΑΣΚ εκφυλιστεί στο ευθύγραμμο τμήμα ΜΚ, πράγμα που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Στο σχήμα αυτό διασαφηνίζεται ότι

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}\left(= (\mathrm{MK}) = \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{xy})_{\mathbf{max}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$$

ii)

Ήδη έχει γίνει αρκετή δουλειά. Στο αρχικό σχήμα βλέπουμε ότι $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A\Sigma})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2-(\mathrm{A\Sigma})^2=(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2-2(\mathrm{A\Sigma})^2=(\mathrm{B\Gamma})^2-2(\mathrm{A\Sigma})^2 \Rightarrow$

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=\alpha^2-2(\mathrm{A\Sigma})^2$$

Απ' όπου παίρνουμε

$$(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)_{\min}=\alpha^2-2[(\mathrm{A\Sigma})^2]_{\max}$$

και με τη βοήθεια του τελευταίου σχήματος, αφού παραλείψουμε κάποιες λεπτομέρειες που κινούνται στη σφαίρα του αυτονόητου, παίρνουμε

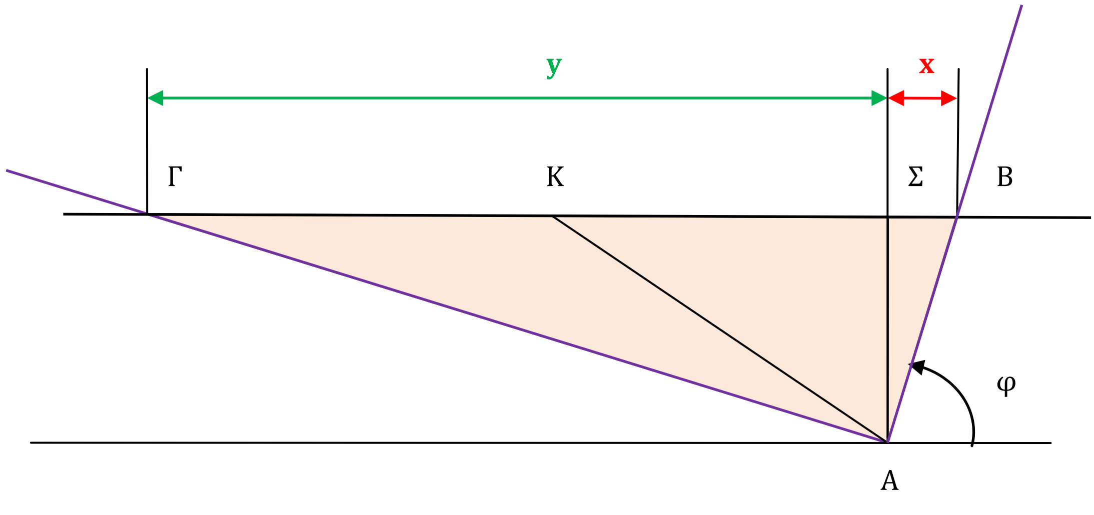
$$\mathbf{(x^2+y^2)_{min}=\frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{2}}$$

που προκύπτει θέτοντας

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}\left(=(\mathrm{MK})=\frac{(\mathrm{B\Gamma})}{2}\right)=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}}$$

2.

Κινούμενοι γύρω από τον ίδιο άξονα σκέψης με τα προηγούμενα οδηγούμαστε στο ακόλουθο «δυναμικό» σχήμα:



Στο σχήμα αυτό έχουμε σχεδιάσει δυο παράλληλες ευθείες που απέχουν μεταξύ τους απόσταση μήκους β. Στο σταθερό σημείο Α της «κάτω» παραλλήλου έχουμε τοποθετήσει την κορυφή Α της ορθής γωνίας xAy η οποία στρέφεται, ώστε η τιμή της γωνίας στροφής φ να διατρέχει το διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Οι πλευρές της ορθής γωνίας τέμνουν την «πάνω» παράλληλο στα σημεία Β και Γ. Επίσης στο σχήμα φαίνονται το ύψος ΑΣ και η διάμεσος ΑΚ του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ.

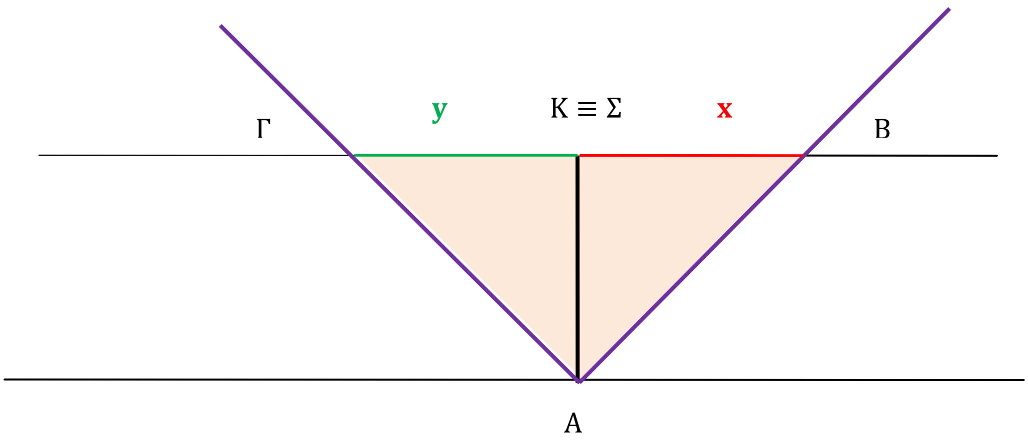
Είναι προφανές ότι, καθώς η γωνία φ από σχεδόν μηδενική τείνει να γίνει ορθή, τα μέτρα (ΒΣ)= x και (ΓΣ)=y παίρνουν όλες τις τιμές του διαστήματος $(0, \infty)$ και ταυτόχρονα ικανοποιούν τη σχέση $xy = (\mathrm{A\Sigma})^2 = \beta^2$

Όμως «η διάμεσος προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας» οπότε

$$x + y = 2(\mathrm{AK}).$$

Η τελευταία σχέση μάς λέει ότι το άθροισμα $x + y$ γίνεται ελάχιστο, όταν το μέτρο της διαμέσου ΑΚ γίνει ελάχιστο, που συμβαίνει, όταν η διάμεσος αυτή συμπέσει με το ύψος ΑΣ.

Όμως, επειδή «μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις», προχωράμε στο παρακάτω σχήμα.



Το ορθογώνιο μας τρίγωνο τώρα έγινε και ισοσκελές που χωρίζεται από το ύψος ΑΣ που είναι πλέον και διάμεσος σε δύο ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα.

Αλλά τέρμα τα λόγια.

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}\big(= (\mathrm{A\Sigma})\big) = \boldsymbol{\beta} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})_{\mathbf{min}} = \mathbf{2}\boldsymbol{\beta}$$

Όμως θα ‘θελα να τελειώσω με ένα «ακροβατικό Γεωμετρικό γύμνασμα» που έχει μια «ταπεινή» αλλά ενδιαφέρουσα ιστορία.

Η ιστορία

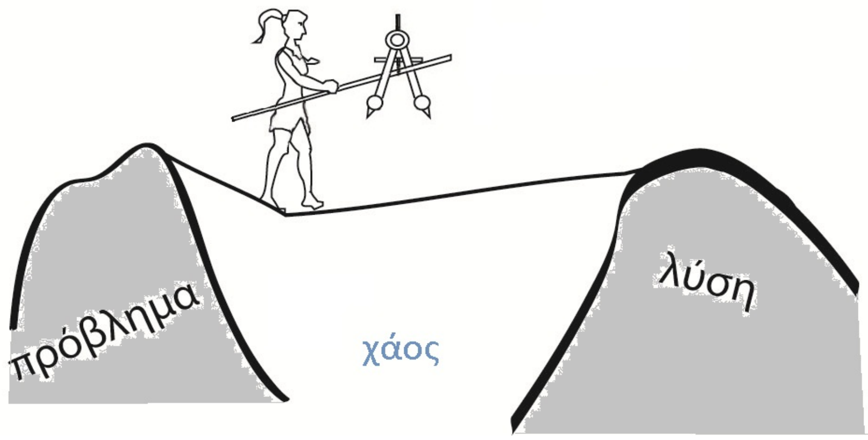
Αρχικά είχα σκεφτεί κάτι διαφορετικό για να υπολογίσω γεωμετρικά το $(x + y)_{\min}$ όταν $xy = \beta^2 =$ σταθερό. Κατέληγα στη σωστή απάντηση, αλλά η λύση δεν ήταν πλήρης. Το αποτέλεσμα ήταν απλά να «φτιαχτεί» ένα ενδιαφέρον πρόβλημα – γύμνασμα.

Το γύμνασμα

Δίδεται κύκλος ακτίνας μέτρου $\frac{\alpha}{2}$ και κέντρου Κ. Εντός του κύκλου δίνεται σταθερό σημείο Σ για το οποίο $\beta^2 = (\mathrm{K\Sigma})^2 + \frac{\alpha^2}{4}$ με $\beta > 0$. Φέρουμε μια τυχαία χορδή ΒΓ η οποία διέρχεται από το Σ.

i) Αποδείξτε ότι το γινόμενο $(\mathrm{B\Sigma}) \cdot (\Gamma\Sigma)$ είναι σταθερό και υπολογίστε την τιμή του.

ii) Βρείτε σε ποια θέση η ΒΓ έχει ελάχιστο μέτρο και υπολογίστε το μέτρο αυτό.



Ακροβάτησα εκτελούσα «γύμνασμα» υψηλού βαθμού δυσκολίας, ένεκα του βάρους του απαιτούμενου εξοπλισμού (κανόνας και διαβήτης)