Ο Παλμογράφος στη Διδασκαλία της Τριγωνομετρίας

Εφαρμογές της Τριγωνομετρίας σε πραγματικά προβλήματα και ενδιαφέρουσες επεκτάσεις

Περίληψη

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις
Κυματική
STEM
Παλμογράφος
Εφαρμογές των Μαθηματικών
Χώρος Εργασίας

Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Κατασκευή και βασικές ιδιότητες

Κατασκευή των Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Συνάρτηση Ημίτονο

Συνάρτηση_Ημίτονο.ggb

Συνάρτηση Συνημίτονο

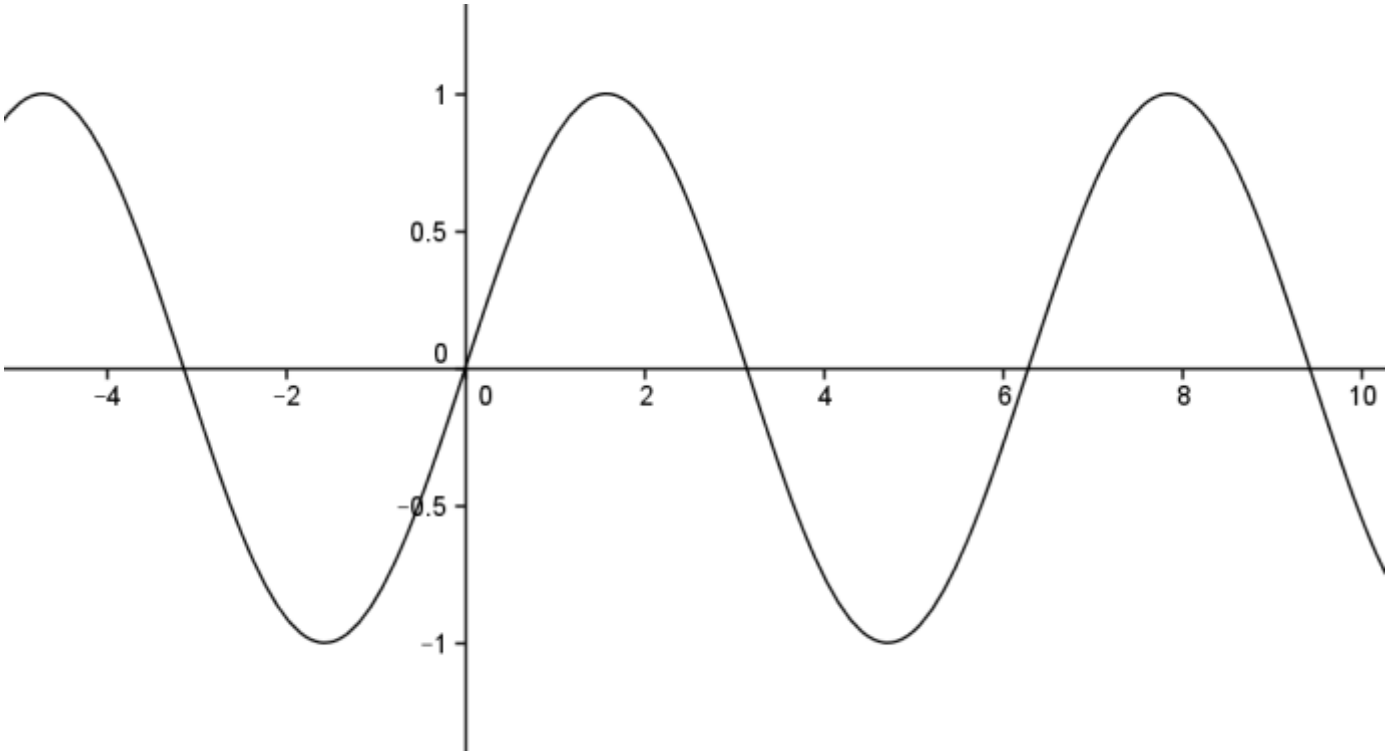
Συνάρτηση_Συνημίτονο.ggb

Συνάρτηση Εφαπτομένη

Συνάρτηση_Εφαπτομένη.ggb

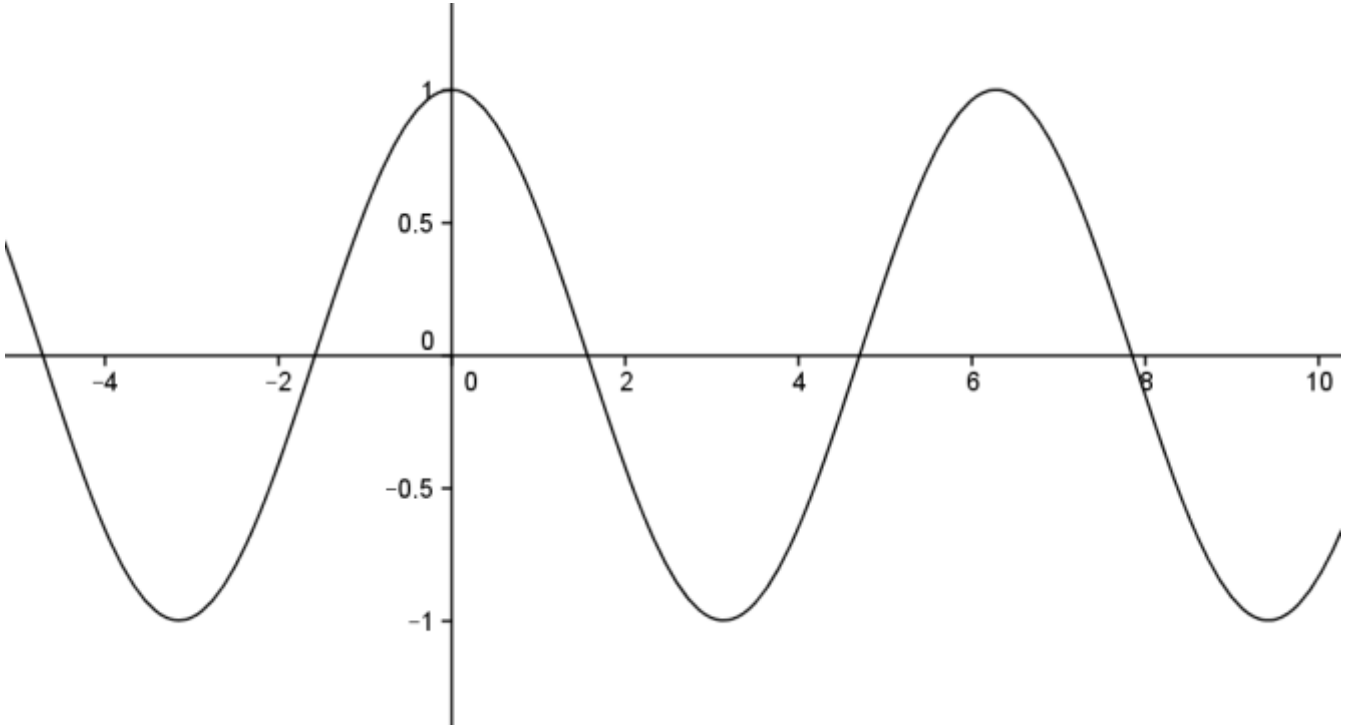
Γραφικές Παραστάσεις

- Συνάρτηση Ημίτονο



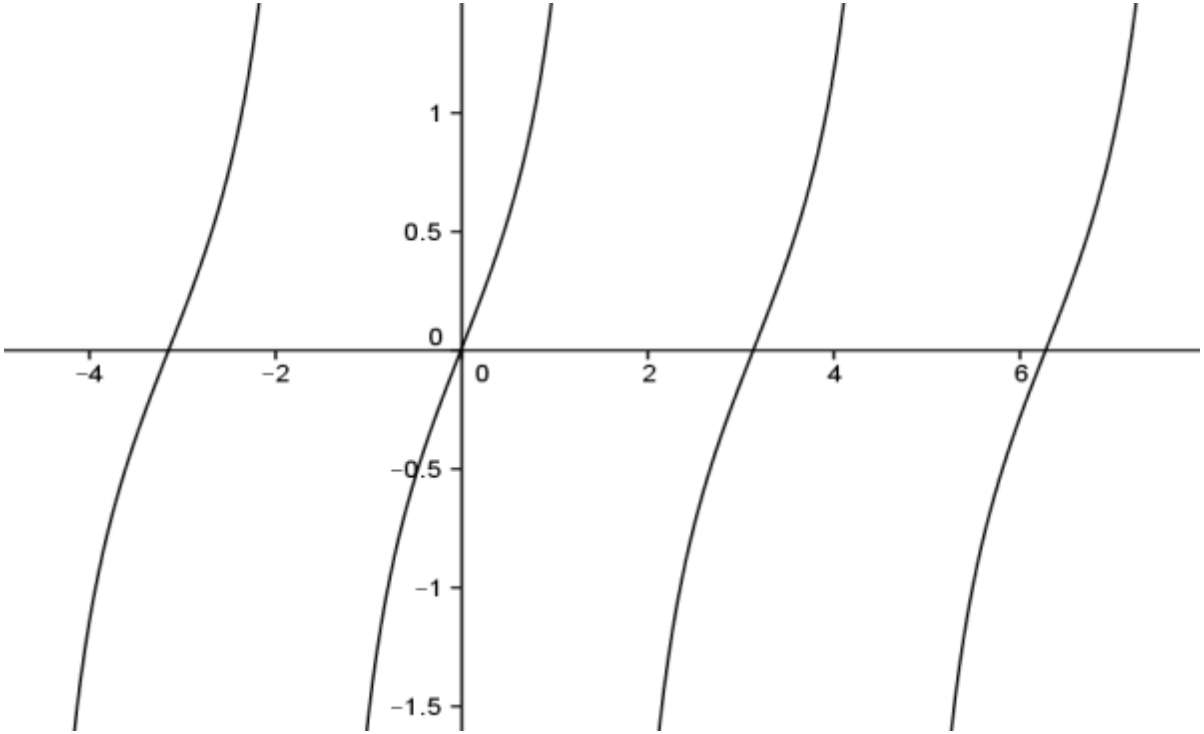
Γραφικές Παραστάσεις

- Συνάρτηση Συνημίτονο



Γραφικές Παραστάσεις

- Συνάρτηση Εφαπτομένη



Βασικές Ιδιότητες

$$f(x) = \eta\mu(a \cdot x)$$

Ημίτονο1.ggb

$$f(x) = \eta\mu(x + c)$$

Ημίτονο2.ggb

$$f(x) = a \cdot \eta\mu(x)$$

Ημίτονο3.ggb

Βασικές Ιδιότητες

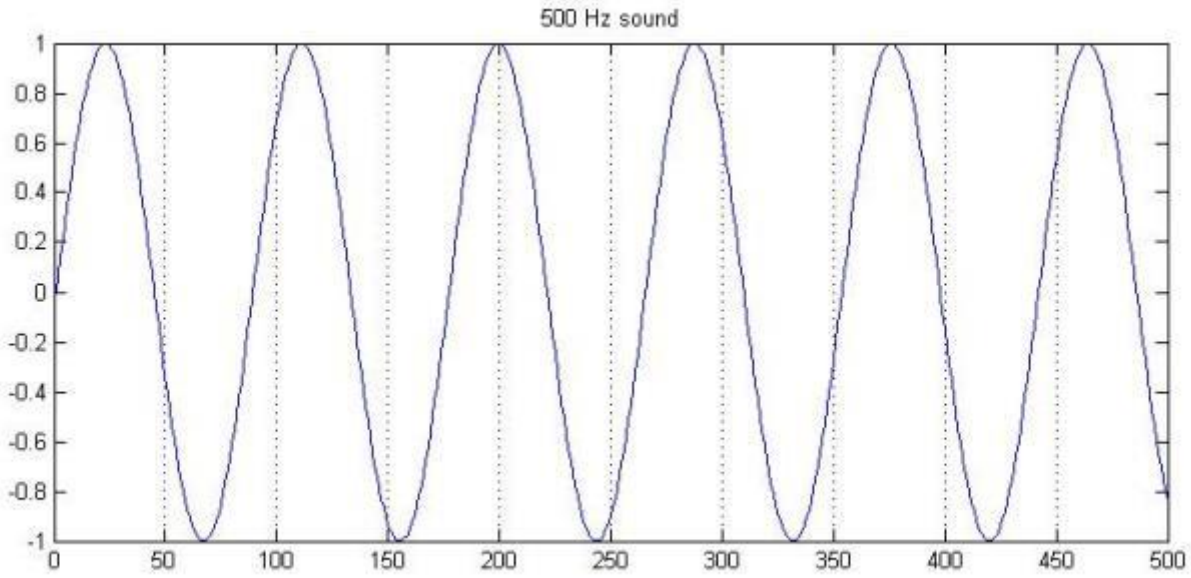
- Η Συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(x)$ έχει περίοδο 2π.
- Η Συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(\alpha \cdot x)$ έχει περίοδο $\frac{2\pi}{\alpha}$.
- Η Συνάρτηση $g(x) = \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ έχει περίοδο T.
- Η Συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(2\pi \cdot f \cdot x)$ έχει περίοδο $\frac{1}{f}$ (και συχνότητα f).

Ημιτονοειδή Κύματα

Εφαρμογές των Μαθηματικών

Απλό Ηχητικό Κύμα

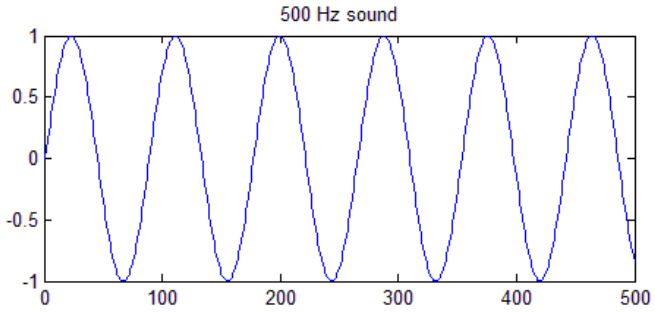
- Αναπαριστώντας έναν απλό ήχο (π.χ. από ένα διαπασών ή μια νότα ενός μουσικού οργάνου) παίρνουμε μια ημιτονοειδή συνάρτηση.



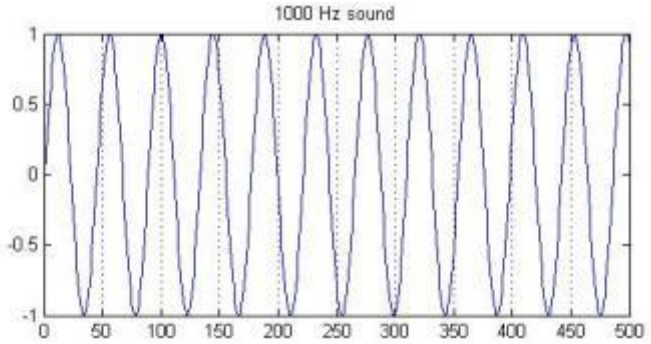
Απλό Ηχητικό Κύμα

- Ανάλογα με την συχνότητα παίρνουμε και διαφορετική συνάρτηση:

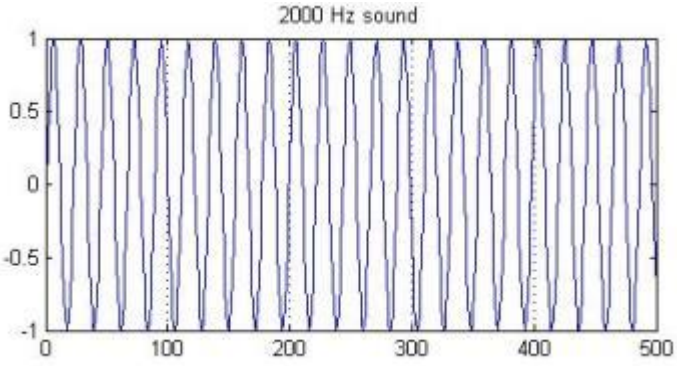
500 Hz



1000 Hz



2000 Hz

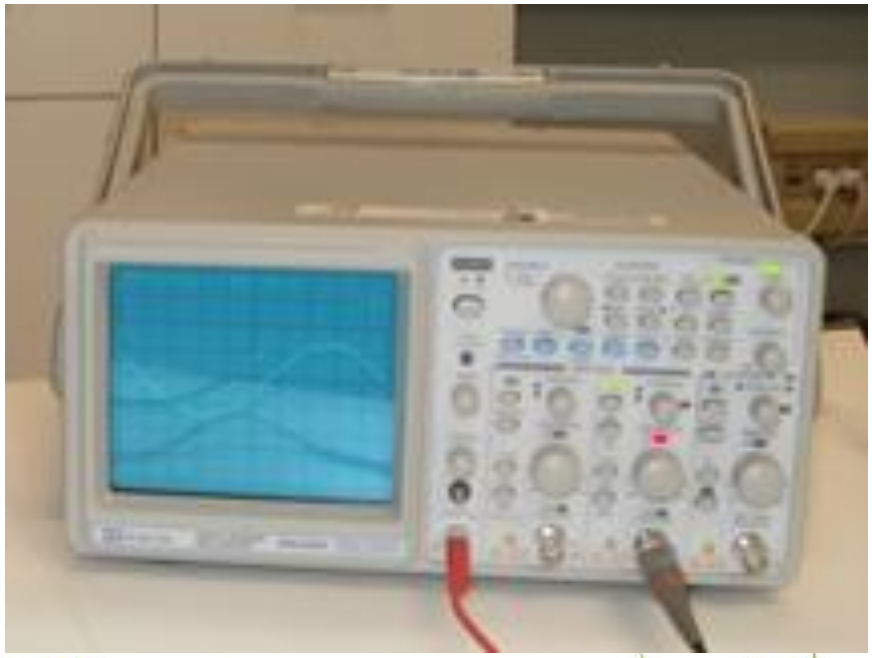


Ο Παλμογράφος

Εφαρμογές των Μαθηματικών

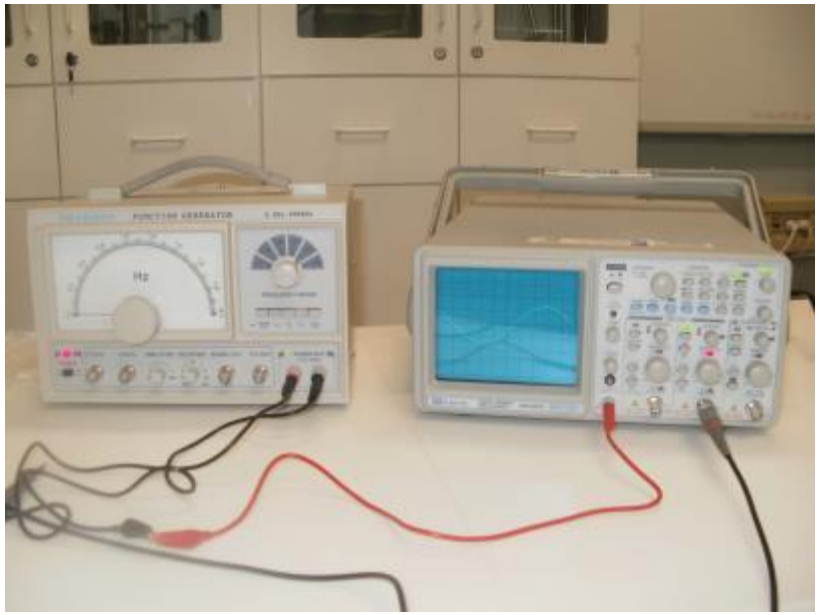
Η συσκευή

- Η συσκευή μετράει ηλεκτρική τάση.
- Συνήθως, χρησιμοποιείται για την απεικόνιση φαινομένων που μεταβάλλονται πολύ γρήγορα (πίεση θερμοκρασία, ήχο, κ.λ.π.).



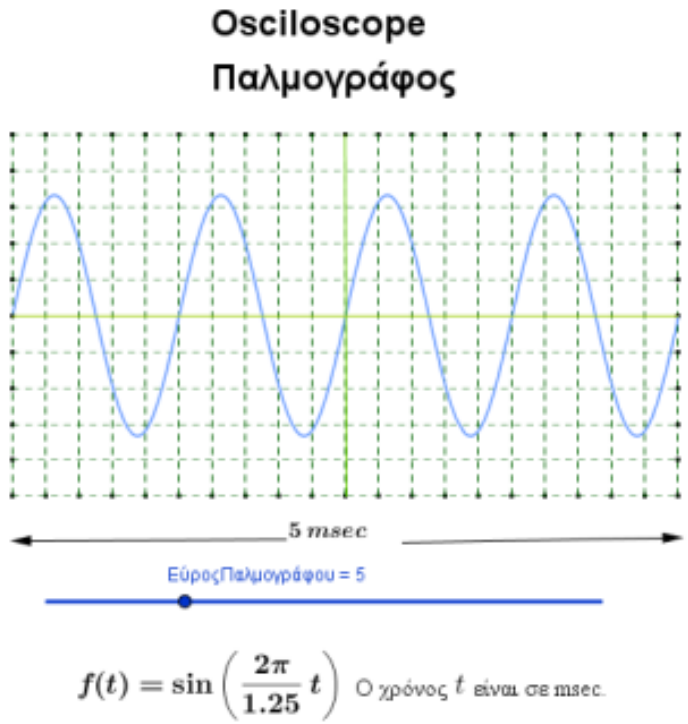
Η συσκευή

- Στο συγκεκριμένο πείραμα θεωρούμε ότι ο παλμογράφος είναι συνδεδεμένος με μια γεννήτρια παραγωγής απλών ακουστικών σημάτων.



Η συσκευή

- Προσομοίωση της λειτουργίας του παλμογράφου σε Geogebra.



DR01.ggb

Ανάλυση του Σεναρίου

Δραστηριότητες 1-2

- Εξοικείωση των μαθητών με την λειτουργία του παλμογράφου.

Α. Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 0.4 KHz.

i) Μετρήσετε την περίοδο του σήματος όπως αυτό φαίνεται στον παλμογράφο.

ii) Υπολογίστε τη συχνότητα του σήματος που δείχνει η εικόνα του παλμογράφου.

iii) Ποιός είναι ο τύπος της ημιτονοειδούς συνάρτησης που έχει την ίδια περίοδο με αυτή που φαίνεται στον παλμογράφο;

Β. Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 1 KHz. Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα.

Γ. Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 1.5 KHz. Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα.

Δ. Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 5 KHz. Ρυθμίστε τον παλμογράφο ώστε να φαίνεται καλά η κυματομορφή και επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα.

Ε. Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 0.08 KHz. Ρυθμίστε τον παλμογράφο ώστε να φαίνεται καλά η κυματομορφή και επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα.

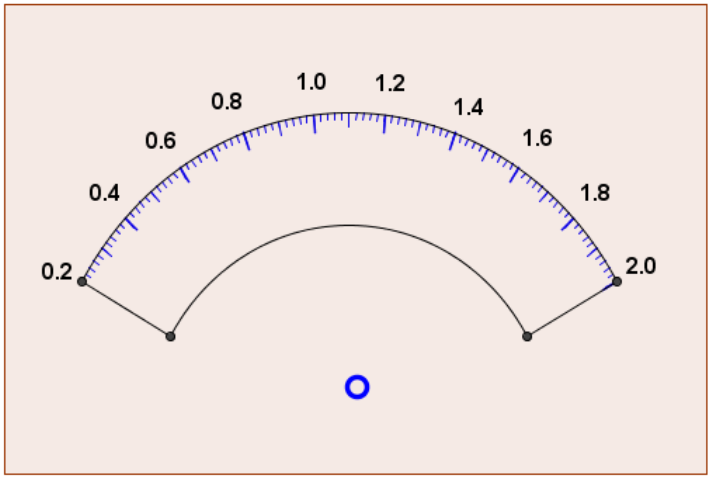
DR01.ggb

Δραστηριότητα 3

- Μελετώντας την εικόνα που δείχνει ο παλμογράφος, βρείτε την παραγόμενη συχνότητα (σε KHz). Πληκτρολογείστε την απάντησή σας στο ειδικό πεδίο και ελέγξτε την ορθότητά της.

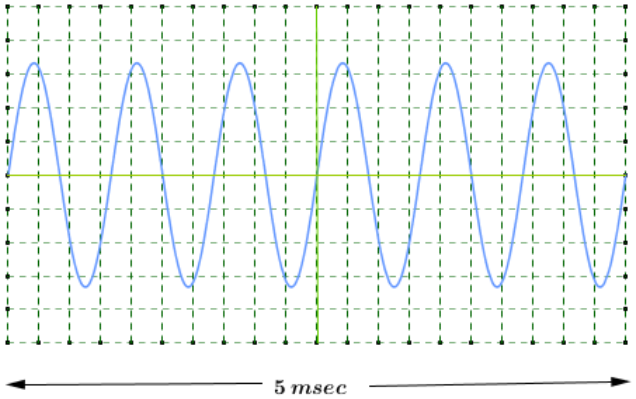
Function Generator

Γεννήτρια Ακουστικών Συχνοτήτων



Osciloscope

Παλμογράφος



Με βάση το σχήμα που φαίνεται στον παλμογράφο, υπολογίστε τη συχνότητα του ακουστικού κύματος.
Στη συνέχεια πληκτρολογήστε την τιμή στο παρακάτω πεδίο και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησής σας.

Υπολογισμένη Συχνότητα 0.2

Λάθος

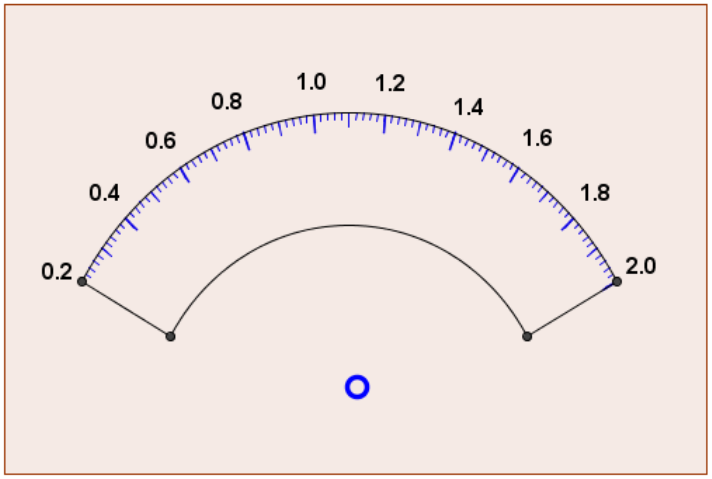
DR03.ggb

Δραστηριότητα 3

- Ποιά είναι η μορφή της ημιτονοειδούς συνάρτησης που φαίνεται στην οθόνη του παλμογράφου (όπου ο χρόνος είναι σε msec);

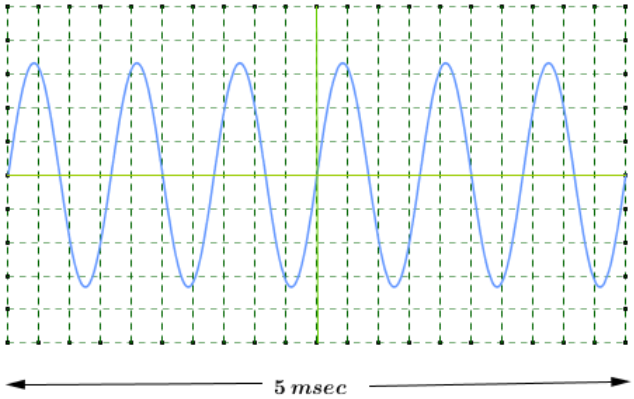
Function Generator

Γεννήτρια Ακουστικών Συχνοτήτων



Osciloscope

Παλμογράφος



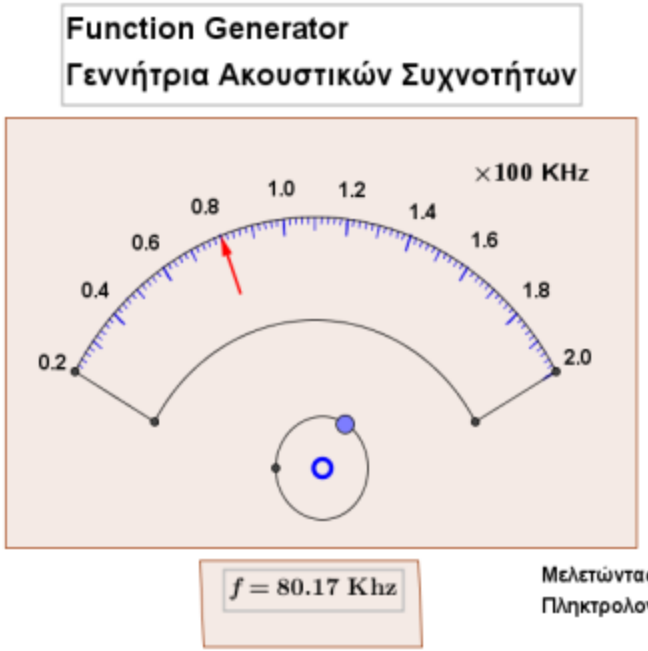
Με βάση το σχήμα που φαίνεται στον παλμογράφο, υπολογίστε τη συχνότητα του ακουστικού κύματος.
Στη συνέχεια πληκτρολογήστε την τιμή στο παρακάτω πεδίο και ελέγξτε την ορθότητα της απάντησής σας.

Υπολογισμένη Συχνότητα 0.2

Λάθος

Δραστηριότητα 4

- Συνδέουμε στον παλμογράφο μια νέα γεννήτρια που παράγει κύματα από 20 έως 200 KHz. Επομένως, για να μπορέσουμε να δούμε το κύμα στον παλμογράφο πρέπει να αλλάξουμε το εύρος σχεδίασής του. Υπολογίστε το νέο εύρος σχεδίασης του παλμογράφου σε **μsec** σύμφωνα με τις πληροφορίες της εικόνας.



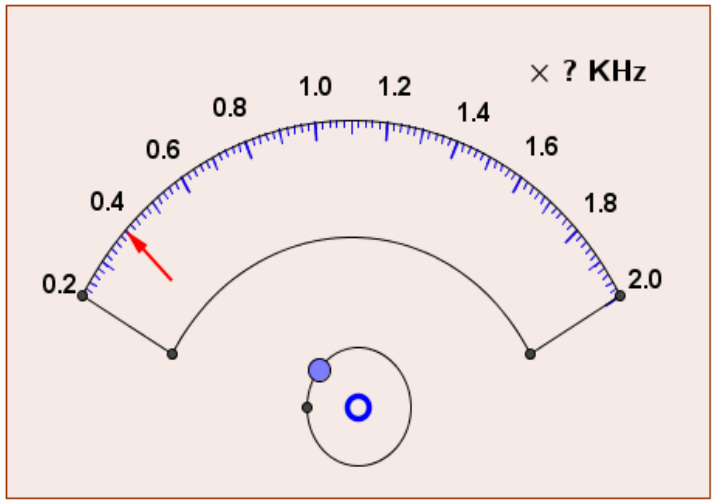
DR04.ggb

Δραστηριότητα 5

- Συνδέουμε στον παλμογράφο μια νέα γεννήτρια. Υπολογίστε την νέα κλίμακα της γεννήτριας σύμφωνα με τις πληροφορίες που σας δίνονται.

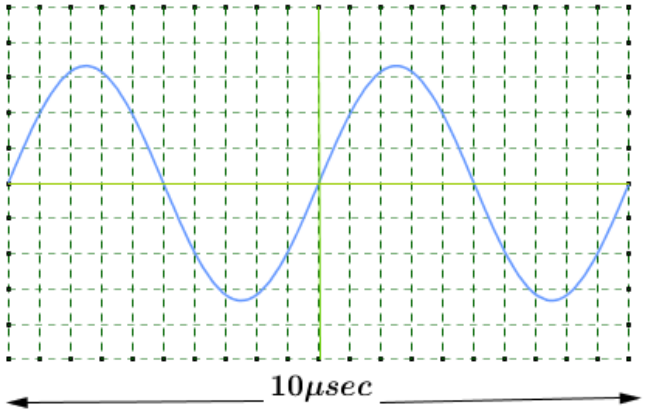
Function Generator

Γεννήτρια Ακουστικών Συχνοτήτων



Osciloscope

Παλμογράφος



Μελετώντας το συγκεκριμένο πείραμα, υπολογίστε την κλίμακα της γεννήτριας.
Πληκτρολογείστε την απάντησή σας και ελέγξτε την ορθότητά της.

Κλίμακα = 1

Λάθος

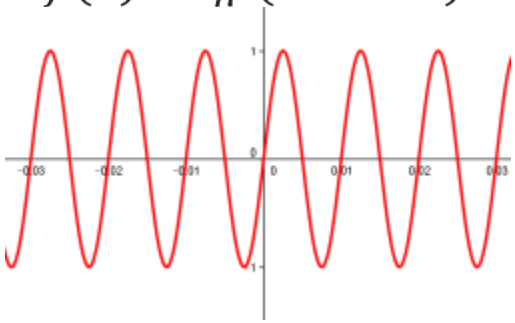
DR05.ggb

Επεκτάσεις

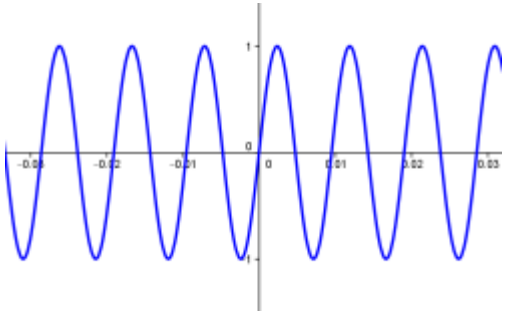
Διακρότημα

- Αθροίζοντας δύο ημιτονοειδείς συναρτήσεις, οι οποίες έχουν περίπου την ίδια συχνότητα παίρνουμε το Διακρότημα.

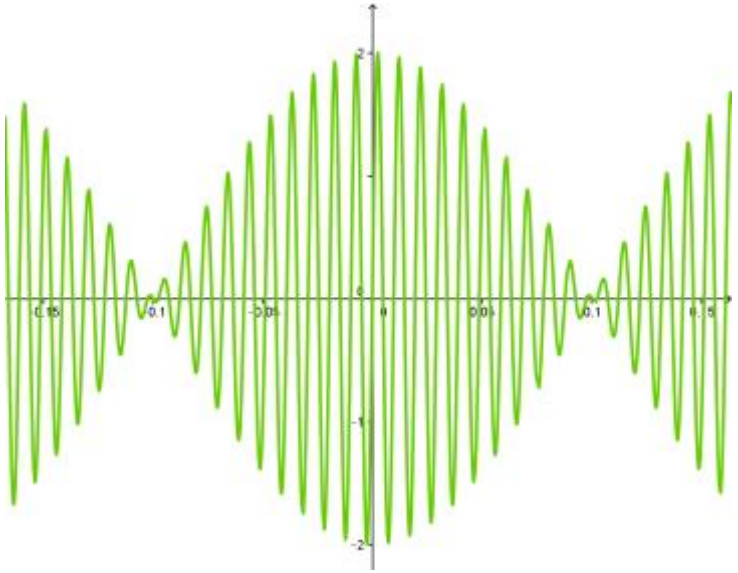
$f(x) = \eta\mu(200\pi \cdot x)$



$g(x) = \eta\mu(210\pi \cdot x)$



$h(x) = \eta\mu(200\pi \cdot x)+\eta\mu(210\pi \cdot x)$

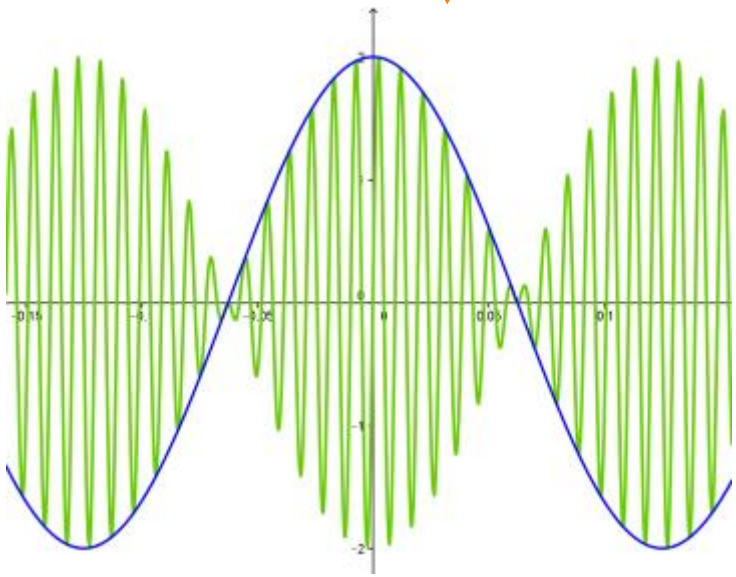


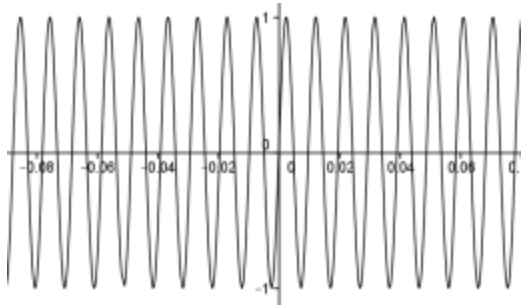
Διακρότημα.ggb

Διακρότημα

- Επεξήγηση.

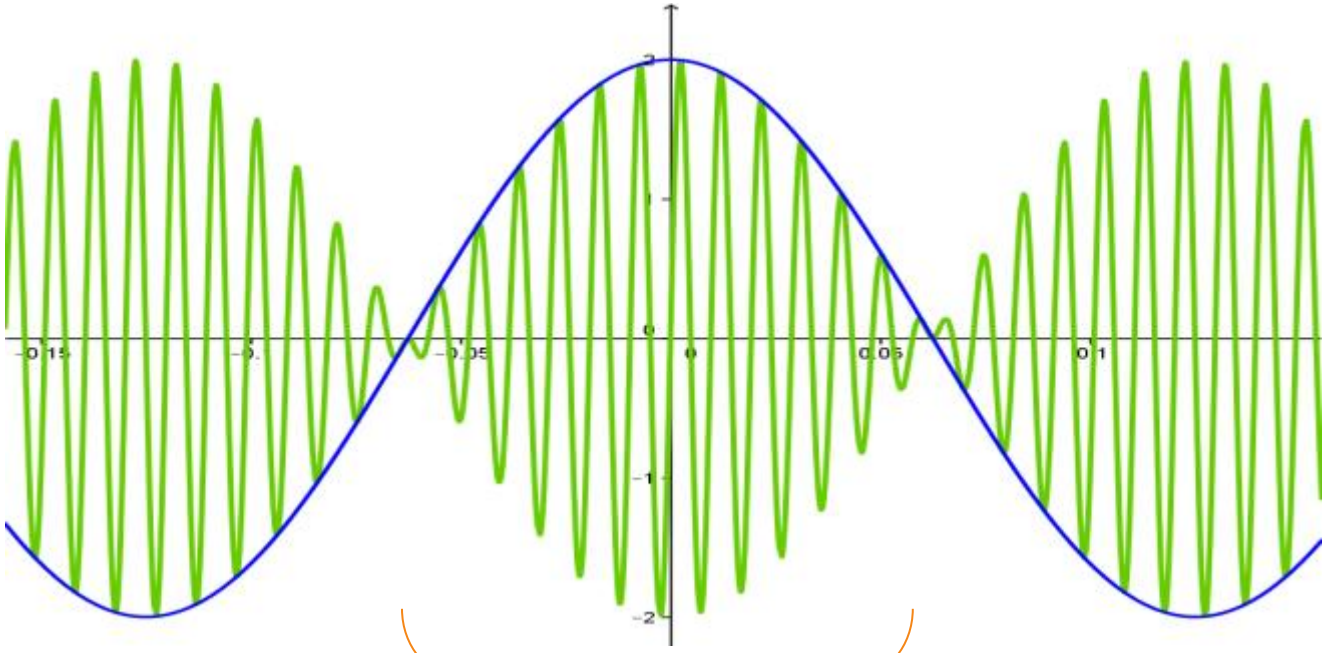
$$\eta\mu(\alpha x) + \eta\mu(\beta x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right)$$





Διακρότημα

- Περίοδος Διακροτήματος



$$T = \frac{2\pi}{\alpha - \beta}$$

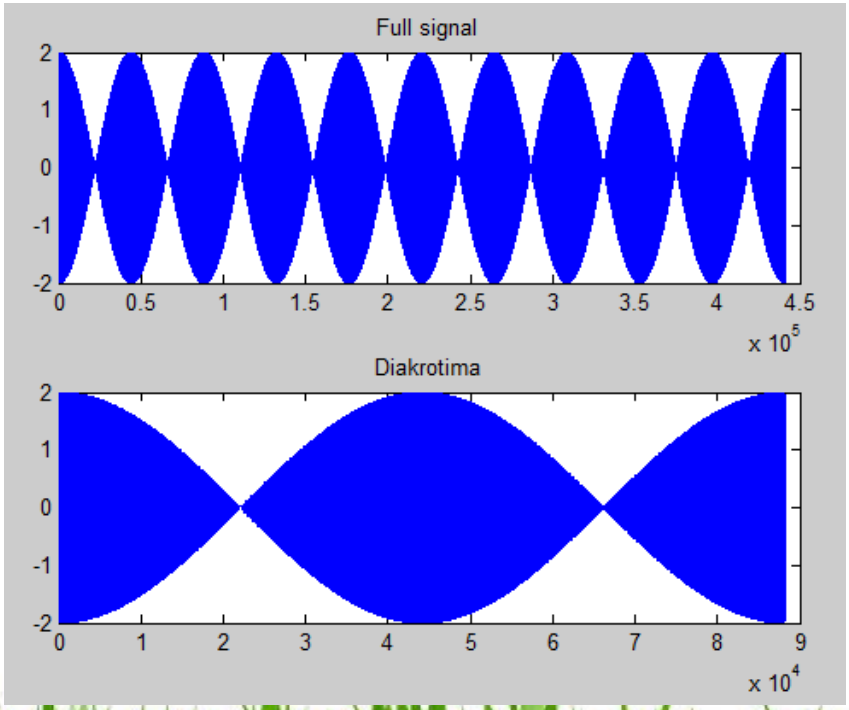
Διακρότημα

- Η Περίοδος του διακροτήματος αυξάνεται όσο μικραίνει η διαφορά των δύο συχνοτήτων που αθροίζονται.

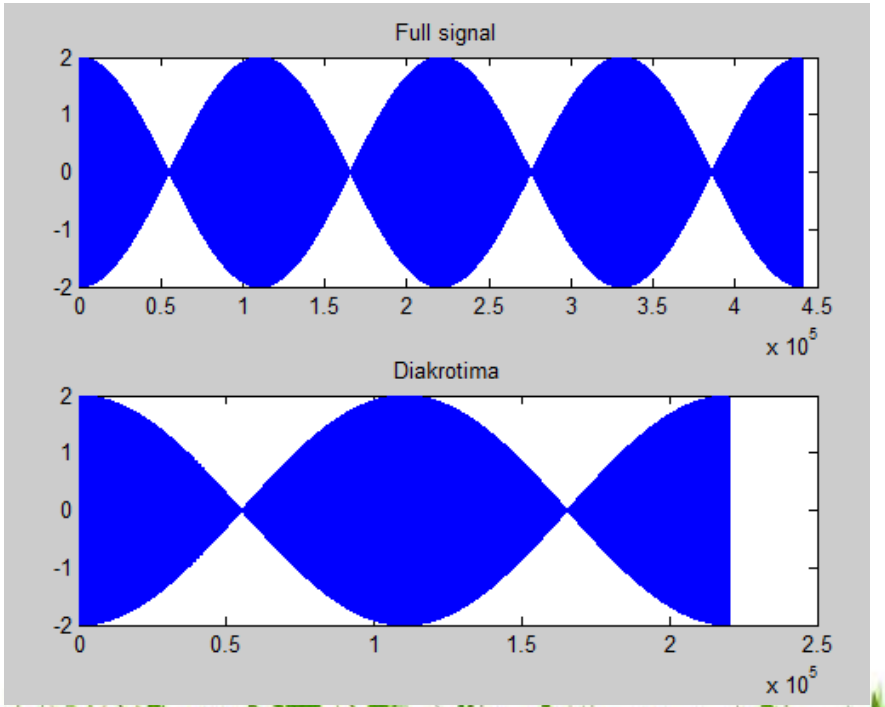
$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\alpha - \beta}}$$

Διακρότημα

Διακρότημα
500 Hz + 501Hz



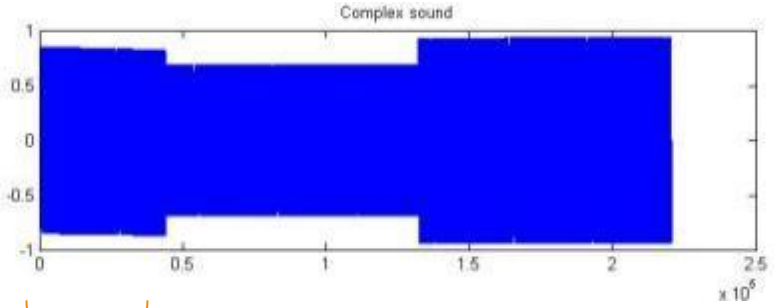
Διακρότημα
500 Hz + 500,4Hz

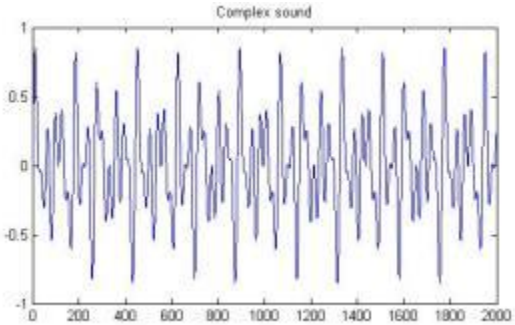


Μελωδία

- Συνθέτοντας πολλές ημιτονοειδείς συναρτήσεις μπορούμε να πάρουμε πιο σύνθετους ήχους από το απλό διακρότημα.

Σύνθεση Συχνοτήτων





Εφαρμογές της Τριγωνομετρίας

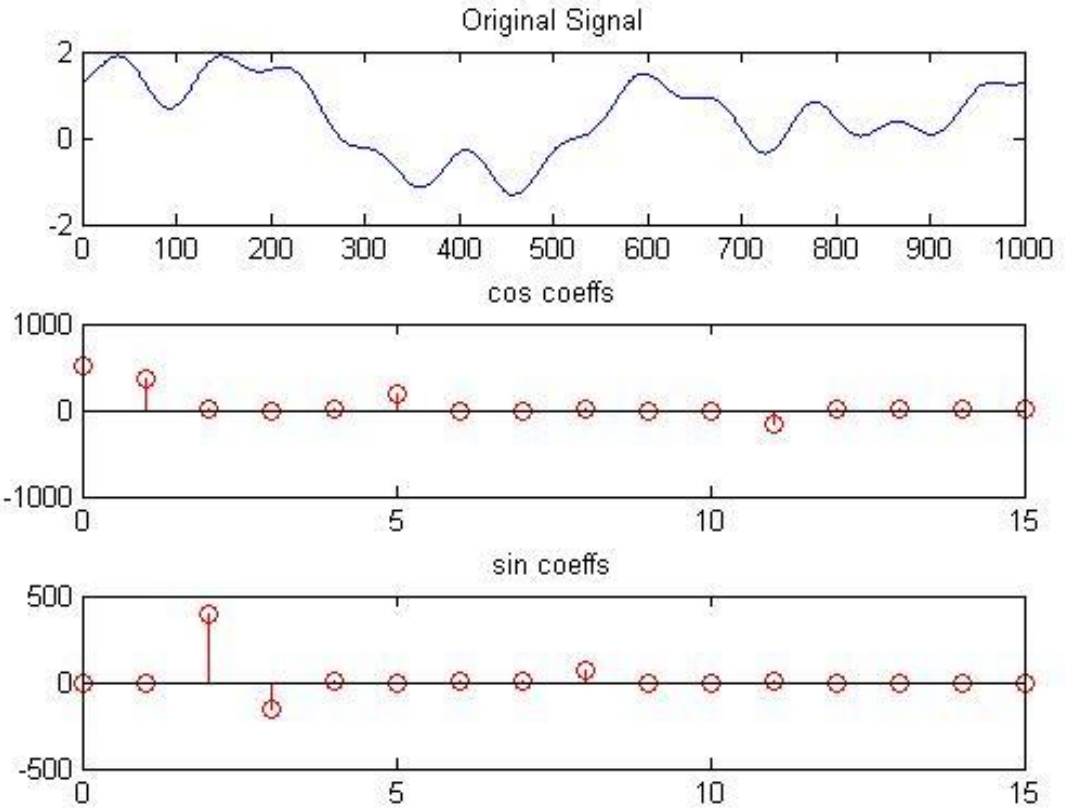
Επεξεργασία Σήματος με τριγωνομετρικές συναρτήσεις στο πεδίο συχνοτήτων

Joseph Fourier

- Ο Joseph Fourier είναι Γάλλος μαθηματικός του 19ου αιώνα.
- Απέδειξε ότι πολύπλοκες συναρτήσεις που πληρούν ορισμένες προϋποθέσεις μπορεί να αναλυθούν ως άθροισμα απλούστερων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Σήμερα υπάρχουν αλγόριθμοι που μπορούν να βρουν τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις για μια τυχαία αρχική συνάρτηση.

Ανάλυση Fourier

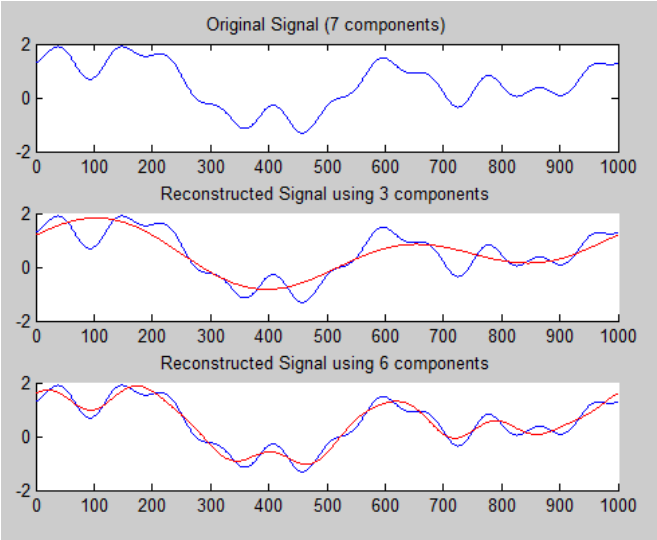
- Παράδειγμα



$$f(x) = a_0 cos(0x) + a_1 cos(x) + a_5 cos(5x) + a_{11} cos(11x)$$
$$b_3 sin(3x) + b_4 sin(4x) + b_8 sin(8x)$$

Ανάλυση Fourier

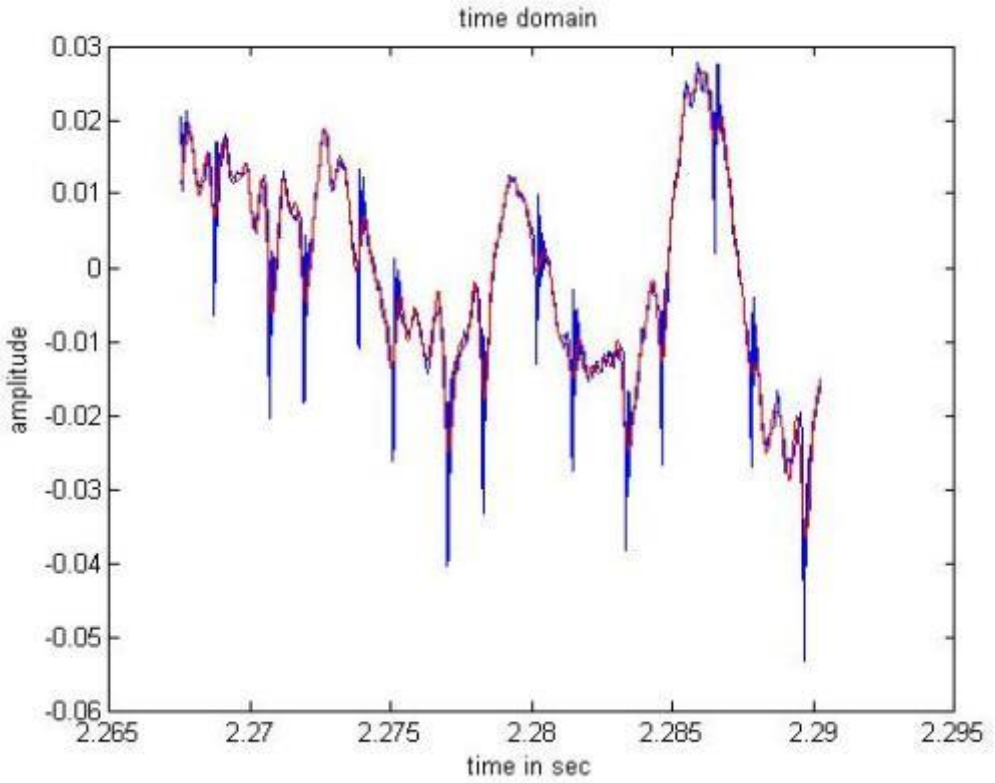
- Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι μπορούμε να ανακατασκευάσουμε ικανοποιητικά τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας μόνο τις **σημαντικότερες** τριγωνομετρικές συναρτήσεις και **όχι όλες**.



- Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να επιτύχουμε συμπίεση των δεδομένων, καθαρισμό του σήματος κ.λ.π.

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 1**: Ανακατασκευή με το 5% των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

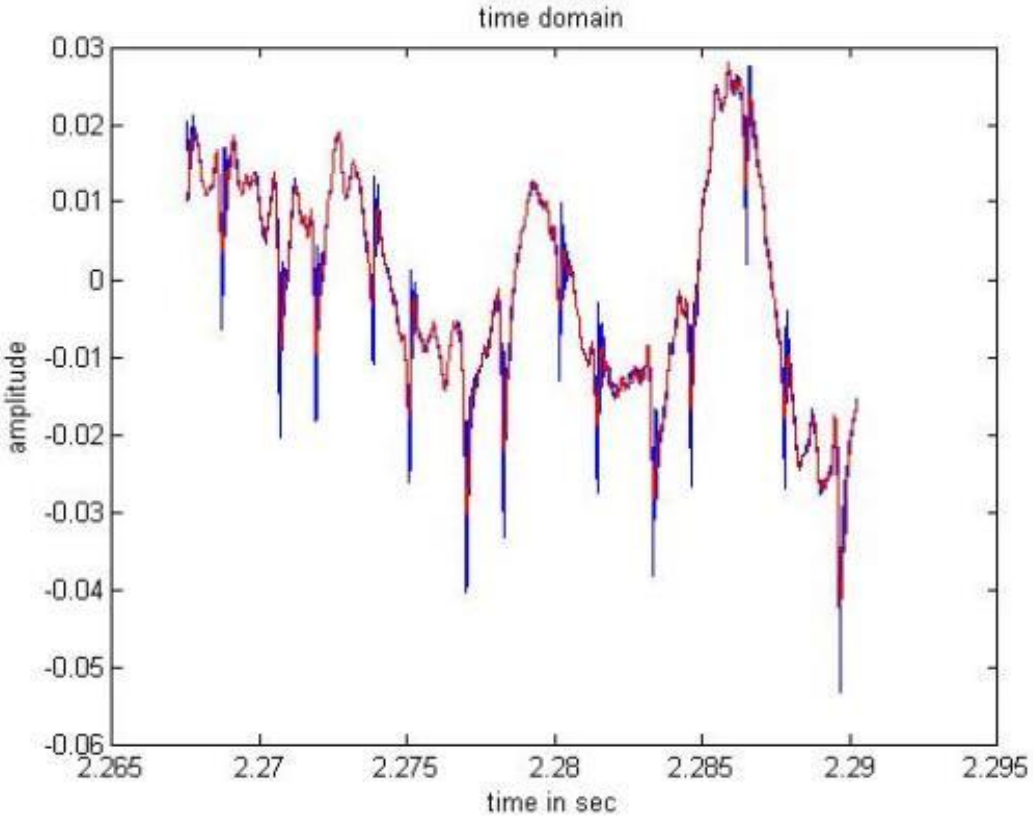


Αρχικό Σήμα

Ανακατασκευασμένο Σήμα

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 2**: Ανακατασκευή με το 10% των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

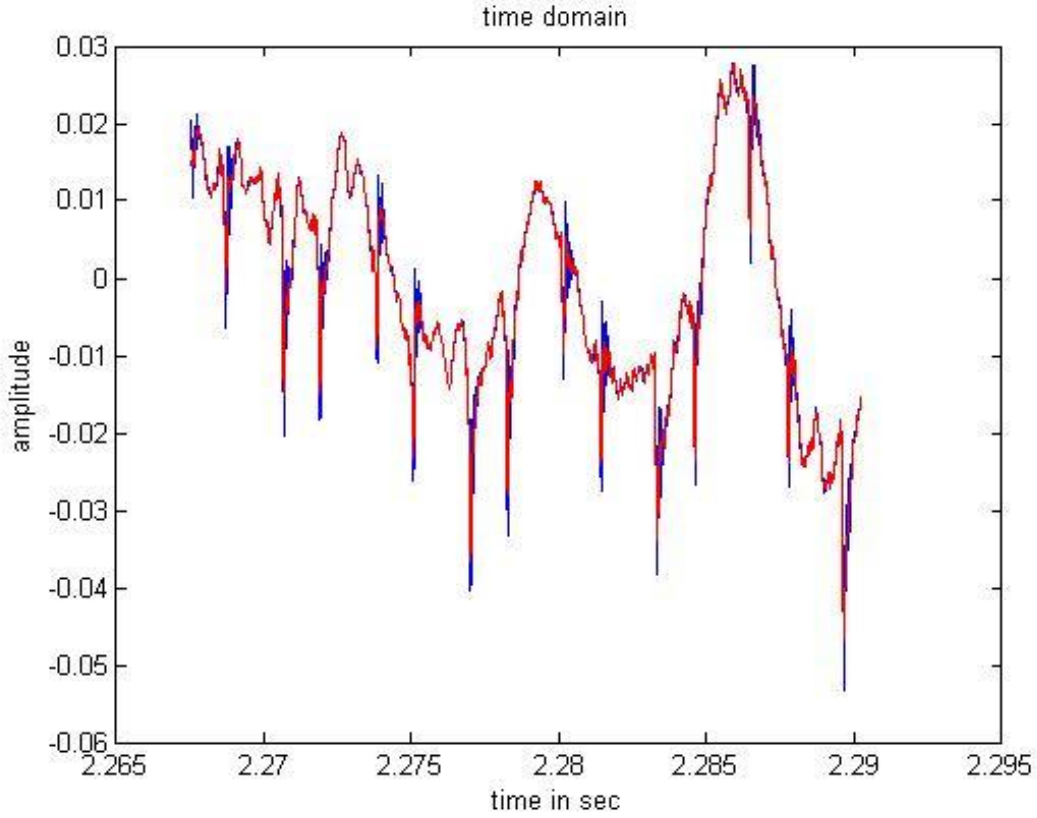


Αρχικό Σήμα

Ανακατασκευασμένο Σήμα

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 3**: Ανακατασκευή με το 20% των τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Αρχικό Σήμα

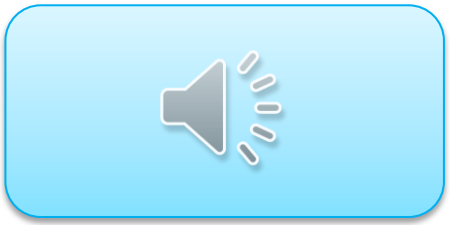
Ανακατασκευασμένο Σήμα

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 5**: Καθαρισμός του Σήματος από θόρυβο, κόβοντας τους λιγότερο σημαντικούς συντελεστές (Lowpass filter).

Αρχικό Σήμα

Ανακατασκευασμένο Σήμα



Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 6**: Αφαίρεση Θορύβου από εικόνα

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 7**: Συμπίεση Εικόνας

Αρχική Εικόνα (2.4 Mb)

Συμπίεση JPEG (151 Kb)

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 7**: Συμπίεση Εικόνας

Αρχική Εικόνα (2.4 Mb)

Συμπίεση JPEG (47 Kb)

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 7**: Συμπίεση Εικόνας

Αρχική Εικόνα (2.4 Mb)

Συμπίεση JPEG (32 Kb)

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 7**: Συμπίεση Εικόνας

Αρχική Εικόνα (2.4 Mb)

Συμπίεση JPEG (27 Kb)

Ανάλυση Fourier

- **Παράδειγμα 7**: Συμπίεση Εικόνας

Αρχική Εικόνα (2.4 Mb)

Συμπίεση JPEG (25 Kb)

multiplication
angle
tessellation
hyperbole
infinity
symmetry
equal
vertex
epsilon
ray
y-intercept
whole numbers
heptagon
exponent
reciprocal
equilateral