Συνέδριο για τα Μαθηματικά στα Π.Π.Σ. 2014

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Μπακέττα Βασιλική, Πετροπούλου Γεωργία
Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Αγίων Αναργύρων

Θεσμικό πλαίσιο στα ΠΠΣ

Πειραματική εφαρμογή

- προγραμμάτων σπουδών
- αναλυτικών προγραμμάτων
- μεθόδων διδασκαλίας
- καινοτόμων διδακτικών πρακτικών

Στόχος

- Πρόταση δραστηριοτήτων σχετικά με την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς
- Αποτελέσματα από την εφαρμογή τους στην τάξη

Θεωρητικό πλαίσιο

- «Οι αριθμοί είναι το θεμέλιο των σχολικών μαθηματικών με τα περισσότερα από τα άλλα σκέλη των μαθηματικών να εξελίσσονται από αυτούς» (Mathematics Standards Study Group, 2004)
- Οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων, παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών (Κολέζα, 2009)

- Οι αναπαραστάσεις που έχει ο μαθητής για μια έννοια, συνδέονται άμεσα με την ικανότητά του στα Μαθηματικά
- Οι απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των διαισθητικών κατανοήσεων των μαθητών και των τυπικών αποδείξεων
- Η «ιδέα – κλειδί» (Raman & Weber, 2006)

Οι υπάρχουσες έρευνες

- Σύγχυση των δεκαδικών αριθμών με τους αρνητικούς αριθμούς (Fischbein et al., 1995)
- Σύγχυση των πραγματικών αριθμών και της δεκαδικής τους αναπαράστασης
- Η κατανόηση της πυκνότητας, εμφανίζεται να έχει σχέση με την κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης των αριθμών του αντίστοιχου συνόλου (Giannakoulias, Souyoul, Zachariades, 2007)

Μεθοδολογία

- Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων
- Δεδομένα από την εφαρμογή στην τάξη
- Τεχνικές θεμελιωμένης θεωρίας (Strauss & Corbin, 1998)

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων

Η πορεία προς την τυπική απόδειξη

•Αξίωμα πληρότητας των πραγματικών αριθμών

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει supremum.

⇓

•Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών (Αρχή Ευδόξου – Αρχιμήδους)

Το σύνολο των φυσικών δεν είναι άνω φραγμένο.

⇓

•Πόρισμα

Για κάθε πραγματικό αριθμό ε > 0 υπάρχει φυσικός αριθμός ν≥1, ώστε: 1/ν < ε.

Η βασική ιδέα της απόδειξης

Αν για ένα διάστημα (α, β) διαλέξουμε έναν φυσικό ν ώστε 1/ν < β – α,

Το ε του πορίσματος

τότε κάποιο πολλαπλάσιο του 1/ν, δηλαδή κάποιος ρητός, θα βρίσκεται στο διάστημα (α, β) αφού:

Δεν μπορεί να υπάρξει ένα πολλαπλάσιο μ/ν < α και το επόμενό του (μ+1)/ν > β γιατί τότε θα είχαμε:

$$\frac{\mu+1}{\nu}-\frac{\mu}{\nu}>\beta-\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}>\beta-\alpha$$

που δεν ισχύει.

Οι δραστηριότητες

Δραστηριότητα Α

Δώστε τιμές στο α και στο β, όσο κοντά (μεταξύ τους) θέλετε, σημειώστε τες στο σχήμα και σημειώστε στο σχήμα τη διαφορά β-α.

Δραστηριότητα Β

Μπορείτε να βρείτε κάποιο φυσικό αριθμό **ν**, ώστε:

$$\frac{1}{\nu} < \beta - \alpha$$

Σημειώστε τις τιμές των α, β, 1/ν στο παρακάτω σχήμα:

Δραστηριότητα Γ

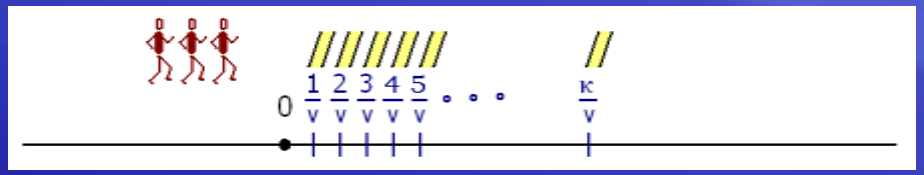
Πιστεύετε ότι για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό, όσο μικρός και αν είναι, θα υπάρχει πάντα κλάσμα 1/ν που θα είναι μικρότερο από αυτόν τον αριθμό;

Εξηγήστε τη σκέψη σας.

Δραστηριότητα Δ

Σημειώστε στον παρακάτω άξονα τα 5 πρώτα πολλαπλάσια του κλάσματος που βρήκατε στο ερώτημα [Β], στον παρακάτω άξονα.

Και κάπου …πέρα στον άξονα, ένα μεγάλο πολλαπλάσιό του, π.χ. το 100στό.

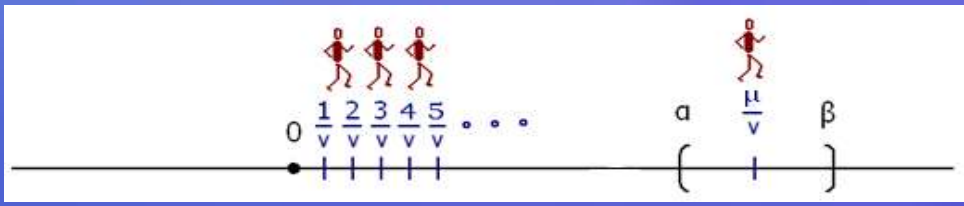


Δραστηριότητα Ε

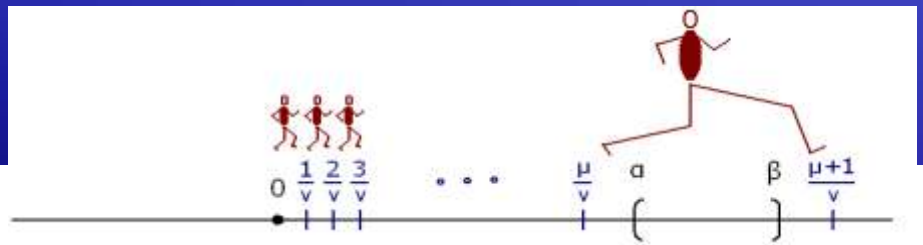
Χρησιμοποιώντας το μήκος 1/ν ως *«βηματισμό»* πάνω στην αριθμογραμμή , παίρνουμε τα πολλαπλάσιά του 1/ν, δηλαδή τα $\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu},\frac{3}{\nu},\frac{4}{\nu},\ldots,\frac{\mu}{\nu},\ldots$ προχωρώντας προς το διάστημα (α, β) που έχετε ορίσει.

Ποια από τις δύο περιπτώσεις που περιγράφονται παρακάτω πιστεύετε ότι ισχύει; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

[Ι] Κάποια στιγμή, κάποιο πολλαπλάσιο του 1/ν που διαλέξατε θα «πέσει μέσα» στο διάστημα (α, β).



[ΙΙ] Μπορεί να υπάρξει ένα τόσο *«μεγάλο βήμα»* έτσι ώστε κάποιο πολλαπλάσιο του 1/ν, για παράδειγμα το μ/ν να είναι πριν από το α και το επόμενό του (μ+1)/ν μετά από το β; Με άλλα λόγια, κανένα από τα πολλαπλάσια του 1/ν να μην «πέσει μέσα» στο διάστημα (α,β);



Δραστηριότητα Ζ/Παιχνίδι

Κάθε ομάδα θα δώσει σε μια άλλη ομάδα ένα διάστημα, **όσο μικρό θέλει** και η «αντίπαλη» ομάδα πρέπει **να προσπαθήσει να βρει στο διάστημα αυτό ένα ρητό αριθμό.**

Διάστημα **Ο ρητός που βρήκαμε**

(,)

Συζητήστε με τους συμμαθητές αν σε **κάθε** διάστημα (α, β), όσο μικρό κι αν σκεφτείτε, θα υπάρχει **πάντα** ένας ρητός αριθμός;

- Υπάρχει περίπτωση να μην μπορείτε να κάνετε την αντίπαλη ομάδα να κερδίσει;

Αποτελέσματα

Δραστηριότητα Α

Δώστε τιμές στο α και στο β, όσο κοντά (μεταξύ τους) θέλετε, σημειώστε τες στο σχήμα και σημειώστε στο σχήμα τη διαφορά β-α

Μόνο μία από τις τρεις ομάδες επέλεξε τιμές για τα α, β που δεν ήταν φυσικοί (15/16 και 1).

Δραστηριότητα Β

Μπορείτε να βρείτε κάποιο φυσικό αριθμό **ν**, ώστε:

$$\frac{1}{\nu} < \beta - \alpha$$

Σημειώστε τις τιμές των α, β, στο παρακάτω σχήμα

- Μία ομάδα χρησιμοποίησε αμέσως τον αριθμό ν=150.
- Οι μαθητές των δύο άλλων ομάδων έδειχναν επιφυλακτικοί ως προς τις πράξεις που θα ακολουθούσαν.

Δραστηριότητα Γ

Πιστεύετε ότι για οποιοδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό, όσο μικρός και αν είναι, θα υπάρχει πάντα κλάσμα 1/ν

που θα είναι μικρότερο από αυτόν τον αριθμό;

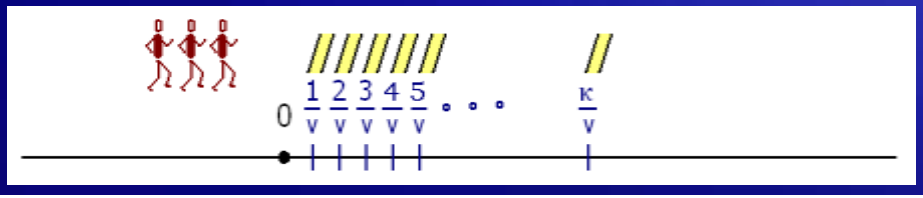
Εξηγήστε τη σκέψη σας.

- Μία ομάδα βάζει στη θέση του ν δεκαδικό
- Άλλη ομάδα δίνει έμφαση στο ότι «το κλάσμα μικραίνει απεριόριστα όσο μεγαλώνει ο παρανομαστής»
- Δυσκολίες στη γενίκευση

Δραστηριότητα Δ

Σημειώστε στον παρακάτω άξονα **τα 5 πρώτα πολλαπλάσια** του κλάσματος που βρήκατε στο ερώτημα [Β], στον παρακάτω άξονα.

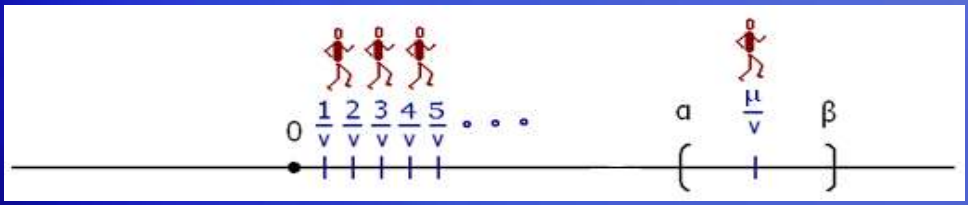
Και κάπου …πέρα στον άξονα, ένα **μεγάλο πολλαπλάσιό του**, πχ το 100στό.



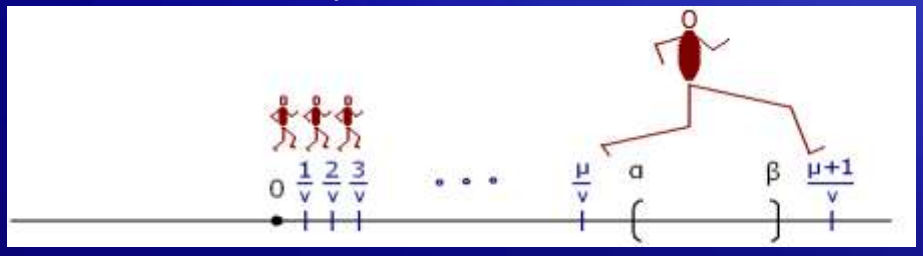
- Προβλήματα με τα κλάσματα και με την έννοια του πολλαπλασίου της κλασματικής μονάδας.

Δραστηριότητα Ε

[Ι] Κάποια στιγμή, κάποιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{\nu}$ που διαλέξατε θα «πέσει μέσα» στο διάστημα (α,β).



[ΙΙ] Μπορεί να υπάρξει ένα τόσο *«μεγάλο βήμα»* έτσι ώστε κάποιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{\nu}$, για παράδειγμα το $\frac{\mu}{\nu}$ να είναι πριν από το α και το επόμενό του $\frac{\mu+1}{\nu}$ μετά από το β; Με άλλα λόγια, κανένα από τα πολλαπλάσια του $\frac{1}{\nu}$ να μην «πέσει μέσα» στο διάστημα (α,β).



- Με δοκιμές βρίσκουν πολλαπλάσιο που να «πέφτει μέσα» στο (α, β)

Κατανοούν ότι δεν μπορεί να ισχύει η περίπτωση [ΙΙ], αλλά χωρίς να γενικεύουν τον συλλογισμό τους για να το δικαιολογήσουν

Δραστηριότητα Ζ/Παιχνίδι

Κάθε ομάδα θα δώσει σε μια άλλη ομάδα ένα διάστημα, **όσο μικρό θέλει** και η «αντίπαλη» ομάδα πρέπει **να προσπαθήσει να βρει στο διάστημα αυτό ένα ρητό αριθμό.**

Διάστημα **Ο ρητός που βρήκαμε**

(,)

Συζητήστε με τους συμμαθητές αν σε **κάθε** διάστημα (α, β), όσο μικρό κι αν σκεφτείτε, θα υπάρχει **πάντα** ένας ρητός αριθμός;

- Λόγω των προβλημάτων που αντιμετώπισαν στον χειρισμό κλασμάτων, έδωσαν δεκαδικά άκρα.
- Θεωρούσαν ότι πάντα μπορούμε να βρίσκουμε κλάσμα μ/ν σε διάστημα (α, β) γιατί «οι αριθμοί είναι άπειροι».

Συμπεράσματα

- Εμπλοκή όλων των μαθητών
- Προβλήματα με το χειρισμό κλασμάτων
- Δυσκολίες στη γενίκευση
- Σύγχυση του άπειρου πλήθους των ρητών με την πυκνότητά τους
- Απουσία αποδεικτικής διαδικασίας

Περαιτέρω θέματα

- Ποιά η ανταπόκριση των μαθητών των Π.Π.Σ. στις δραστηριότητες (οι δυσκολίες αφορούν στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών ή στα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των υπό διαπραγμάτευση εννοιών);
- Ποιες άλλες δραστηριότητες θα μπορούσαν να ενισχύσουν τις διαδικασίες γενίκευσης και απόδειξης;

Ευχαριστούμε πολύ!