Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.

Διδάσκοντας Μαθηματικά μέσω της Τέχνης

ΑΝΩΤΑΤΗ ΣΧΟΛΗ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πολύζου Κωνσταντία

Επιβλέπων Καθηγητής: Πέτρος Κλιάπης

Μάιος 2013 – 2014

Περιεχόμενα

1. **Πρόλογος……3**

2. **Η Τέχνη και οι πολλαπλές λειτουργίες της…….4**

3. **Η Κοινωνική-Πολιτισμική λειτουργία των Μαθηματικών……..9**

4. **Τέχνη και Μαθηματικά……...13**
   - **Α. Τα Μαθηματικά στην Τέχνη……..……13**
   - **Β. Η Τέχνη στα Μαθηματικά…….…...…….20**

5. **Δημιουργώντας ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσω της Τέχνης για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης…….24**
6. **Συμπεράσματα…….34**

7. **Βιβλιογραφικές Αναφορές……...37**

1. Πρόλογος

«Στον δύσμορφο και ευπαρουσίαστο αιώνα μας η ποίηση, η ζωγραφική και η μουσική αντλούν την έμπνευση όχι από τη ζωή, αλλά η μία από την άλλη»

Oscar Wilde

Μία χιλιοειπωμένη ίσως ρήση, που συχνά μας διαπερνά αλλά και μας διαφεύγει η μεγάλη αλήθεια που κρύβει τόσο για την τέχνη, όσο και για την ίδια τη ζωή και τον πολιτισμό μας.

Σε αυτή την εργασία θα προσπαθήσουμε αρχικά να φωτίσουμε κάποιες από τις πολλαπλές επιδράσεις που έχει η Τέχνη στη ζωή και τον πολιτισμό μας, τις θεμελιώδεις ανάγκες που αυτή εξυπηρετεί, και να τη συνδέσουμε με έναν άλλο στυλοβάτη του πολιτισμού μας, τα Μαθηματικά. Στόχος αυτής της εργασίας είναι να αναδείξει τα παιδαγωγικά οφέλη που μπορεί να προκύψουν από το «πάντρεμα» αυτών των, φαινομενικά εκ διαμέτρου αντίθετων, πεδίων στη διδασκαλία των Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ο όρος «Τέχνη» βέβαια είναι τόσο ευρύς που αν θα θέλαμε να τον εξετάσουμε σχολαστικά δεν θα έφτανε σε έκταση αυτή η εργασία για να καλύψει ούτε το πρώτο κεφάλαιο.

Τι είδους τέχνη λοιπόν; Τέχνη και τεχνική του Design με ψηφιακά πρωτίστως μέσα, αλλά βεβαίως και με τα συμβατικά –κανόνα, τρίγωνο, διαβήτη- και κάποια χειραπτικά μέσα για απλές καλλιτεχνικές κατασκευές.

«Μα το Design δεν είναι Τέχνη!», θα αναφωνήσουν οι ειδικοί. Αλλά η οπτική αναπαράσταση, η δύναμη της εικόνας, η διαδικασία της δημιουργίας, της έκφρασης, η αναζήτηση της κατάλληλης φόρμας, του κατάλληλου μοτίβου, του χρώματος, της ισορροπίας του σχεδίου είναι χαρακτηριστικά της Τέχνης και αυτά ακριβώς τα χαρακτηριστικά είναι που θέλουμε να εκμεταλλευτούμε ως εκπαιδευτικοί ώστε να προάγουμε τα Μαθηματικά.

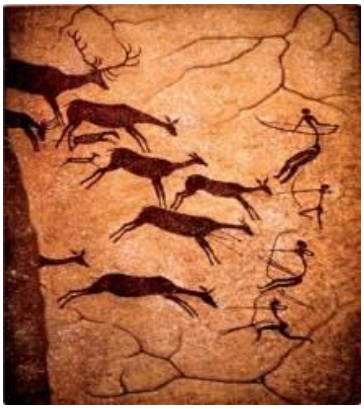
2. Η Τέχνη και οι πολλαπλές λειτουργίες της

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη δύναμη της οπτικής αναπαράστασης, τη δύναμη της εικόνας, ας κάνουμε το παρακάτω πείραμα. Ας υποθέσουμε πως κρατάμε στα χέρια μας τη φωτογραφία ή ακόμα και μια γελοιογραφία ενός αγαπημένου μας προσώπου. Πόσο εύκολα θα μπορούσαμε να τρυπήσουμε στο σημείο του ματιού με μια καρφίτσα; Παρ' όλο που σήμερα ξέρουμε πως μια τέτοια ενέργεια δεν θα επηρέαζε καθόλου το αγαπημένο μας πρόσωπο ωστόσο δεν θα το κάναμε με την ίδια άνεση που θα το κάναμε σε ένα άλλο μέρος της εικόνας προκειμένου παραδείγματος χάριν να την κρεμάσουμε στον τοίχο. Ας φανταστούμε τώρα αυτή την επίδραση σε ανθρώπους προγενέστερων πολιτισμών ώστε να κατανοήσουμε κάτι από την αναγκαιότητα που γέννησε την Τέχνη και τη σπουδαιότητά της στη ζωή των ανθρώπων, πέρα από την αισθητική συνεισφορά της τέχνης στη ζωή των ανθρώπων.

Οι απαρχές της Τέχνης χάνονται στα βάθη της προϊστορίας του ανθρώπινου είδους. Δεν μπορούν να προσδιοριστούν με ακρίβεια ακόμη και σε σχέση με τις απαρχές της γλώσσας. Άλλωστε, σύμφωνα με τον E.H. Gombrich η Τέχνη είναι μια μορφή γλώσσας. Η εικόνα ήταν και η πρώτη μορφή γραφής καθώς οι εικόνες και τα γράμματα είναι, στην πραγματικότητα, συγγενείς εξ αίματος.

Οι πρώτες αναπαραστάσεις σε σπήλαια χρονολογούνται περίπου από το 30.000 ως το 10.000 π.Χ. (βλ. Εικόνες 1,2) Η έκτασή τους, τα εκλεπτυσμένα σχέδια και η ποικιλία των χρωμάτων μαρτυρούν την ανάγκη του προϊστορικού ανθρώπου για την έκφραση μέσω της εικόνας, όσο και τη δύναμη της επιρροής της πάνω του.

Εικόνα 1
Ζωγραφική στο σπήλαιο Αλταμίρα Ισπανία 15.000-10.000 π.Χ.



Εικόνα 2
Ζωγραφική στο σπήλαιο Σοβέ Γαλλία 32.000-30.000 π.Χ

Η Τέχνη βέβαια, ιδωμένη ως αδιάκοπη προσπάθεια μαθήτευσης, μίμησης και εξέλιξης, δεν μπορεί να τοποθετηθεί στα σπήλαια. Οι καταβολές της εντοπίζονται στην Αίγυπτο των Φαραώ και των Πυραμίδων, όπου τα εσωτερικά τους κοσμούνται με αγαλματίδια, γλυπτά και τοιχογραφίες που πιστεύεται πως θα βοηθήσουν την ψυχή του ευυπόληπτου

νεκρού στο ταξίδι της. Υπό το βάρος της ιερής αυτής λειτουργίας της Τέχνης οι Αιγύπτιοι μελετούν πολύ σχολαστικά το ανθρώπινο σώμα με εντυπωσιακά αποτελέσματα και υιοθετούν νόρμες και μια προσήλωση στη φόρμα που μένουν απαραβίαστες για σχεδόν 3.000 χρόνια, (Gombrich, 1995). (βλ. Εικόνα 3)

Εικόνα 3 Χαρακτηριστική στάση του σώματος στην Αιγυπτιακή Τέχνη. Το κάθε μέρος του σώματος σχεδιάζεται από διαφορετική οπτική γωνία χάριν της πιστότερης απόδοσης. Έτσι έχουμε το κεφάλι από το πλάι, το μάτι και ο κορμός από μπροστά και δύο αριστερά πόδια.

Οι Αρχαίοι Έλληνες μελετούν και ξεπερνούν τις αγκυλώσεις των Αιγύπτιων καλλιτεχνών και μας παραδίδουν τις βάσεις για την Τέχνη έτσι όπως αυτή διαμορφώθηκε στο σύγχρονο Δυτικό Πολιτισμό. Αλληλουχία γνωστή και από την εξέλιξη της Μαθηματικής επιστήμης.

Ενώ οι μαθηματικές γνώσεις της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας, στην Αρχαία Ελλάδα συστηματοποιούνται και οικοδομούνται πάνω σε αποδείξεις, η Τέχνη εξελίσσεται με μία θαυμαστή ισορροπία ανάμεσα στον πειραματισμό, την ελευθερία της έκφρασης και το σεβασμό των κανόνων της Αρχαίας Αιγύπτου. Έτσι στα Μαθηματικά έχουμε την αξιωματική θεμελίωση και τη Λογική που θα μας οδηγήσουν βήμα – βήμα στα τεχνολογικά, τα επιστημονικά και τα φιλοσοφικά επιτεύγματα του σήμερα, ενώ στην Τέχνη έχουμε την ανακάλυψη της βράχυνσης* η οποία με τη σειρά της οδηγεί στην κατάκτηση της κίνησης (Gombrich, οπ.π.). Τελειοποιώντας τις παραπάνω τεχνικές, ο καλλιτέχνης της Αρχαίας Ελλάδας αποκτά την άνεση να επιλέγει την οπτική

Εικόνα 4 Ερυθρόμορφο αγγείο Ελλάδα 5ος αιώνας π.Χ.
Η γριά παραμάνα του Οδυσσέα τον αναγνωρίζει από το σημάδι στο πόδι, ενώ αυτός είναι μεταμφιεσμένος σε ζητιάνο. Ακόμη και χωρίς να γνωρίζουμε την ιστορία, μπορούμε να νιώσουμε τη συγκίνηση της στιγμής από τη στάση των σωμάτων, από τα βλέμματα. Για την εξέλιξη από την εικόνα 3 στην εικόνα 4 χρειάστηκαν περίπου 2.500 χρόνια.

Βράχυνση : τεχνική που επιτρέπει στον γλύπτη ή τον ζωγράφο να αναπαριστά το θέμα του από οποιαδήποτε οπτική γωνία, εφαρμόζοντας μια ελαφριά παραμόρφωση προκειμένου να πετύχει την επιθυμητή αληθοφάνεια.

γωνία υπό την οποία θα αναπαραστήσει το θέμα του και έτσι φτάνει στο σημείο να κατακτήσει πια την εσωτερική ζωή των μορφών και τα εκφραστικά μέσα που απαιτούνται προκειμένου να αποκαλυφθούν τα σιωπηλά συναισθήματα των ανθρώπων, να αποτυπωθεί η «λειτουργία της ψυχής» και να επιτευχθεί η απλή αρμονία όπως την πρωτογνώρισε ο κόσμος στην Τέχνη της Αρχαίας Ελλάδας του 5^{ου} αιώνα π.Χ. (βλ. Εικόνα 4).

Βλέπουμε ως τώρα την αδιάρρηκτη σχέση της Τέχνης με τις ανθρώπινες κοινωνίες και τον αγώνα που χρειάστηκε προκειμένου να συντελεστούν κάποιες από τις αλλαγές που μας οδήγησαν σταδιακά σε αυτό που αναγνωρίζουμε σήμερα ως Τέχνη. Μπορούμε να αντιληφθούμε καλύτερα τη θρησκευτική λειτουργία όλων αυτών των ειδώλων που χρησιμοποιήθηκαν κατά καιρούς για να κατευνάσουν τους Θεούς και τους Δαίμονες των ανθρώπων, από τις αναπαραστάσεις των Θεών του πολέμου της Πολυνησίας, ως τα τοτέμ των Ινδιάνων και των Αζτέκων, αλλά και σε πιο κοντινές σε εμάς εποχές, κυρίως τον Μεσαίωνα, όπου οι ζωγράφοι της εποχής εξαντλούνταν αποκλειστικά σε αποδόσεις αποσπασμάτων της Αγίας Γραφής και τους Βίους των Αγίων. Μπορούμε επίσης να δούμε πως η Τέχνη υπηρέτησε το σκοπό της αφήγησης πριν την ανακάλυψη και την ευρεία διάδοση της τυπογραφίας, από τις τοιχογραφίες του Σοβέ, στις αναπαραστάσεις από τα Ομηρικά Έπη ως τα ιερά κείμενα του Μεσαίωνα.

Άλλη διάσταση που προσδίδει τη δύναμη της οπτικής αναπαράστασης που ενέχει η Τέχνη είναι η πολιτική – κοινωνική λειτουργία της. Ισχυρό εργαλείο πειθούς, επιβολής και προπαγάνδας στα χέρια κυρίως της εκάστοτε άρχουσας τάξης, συγκρινόμενη με άλλες μορφές επικοινωνίας και αφήγησης ασκεί πάντα αποτελεσματική, ευρεία και άμεση επίδραση πάνω στα κοινωνικά στρώματα.

Δεν είναι τυχαία η άνθιση του Μπαρόκ* στην Αρχιτεκτονική με αποκορύφωμα το ανάκτορο των Βερσαλλιών (βλ. Εικόνα 5) στα τέλη του 17^{ου} αιώνα. Η φεουδαρχία ήταν ακόμα φαινομενικά ισχυρή, όμως στα «υπόγεια του Πολιτισμού» του Βίκτορος Ουγκώ, έτσι όπως μας περιγράφει τους συσχετισμούς της εποχής στο αριστούργημά του «Οι Άθλιοι», ανθίζουν δημοκρατικές, επικίνδυνες για την άρχουσα τάξη ιδέες, η οποία νιώθοντας την επικείμενη απειλή προσπαθεί να ενισχύσει την εξουσία της, χτίζοντας με ασύλληπτο –ακόμα και για σήμερα- μεγαλείο τα παλάτια και τους ναούς

Εικόνα 5, Άποψη από το ανάκτορο των Βερσαλλιών. Πρόκειται για ένα οικοδόμημα τόσο μεγάλο ώστε καμία φωτογραφία δεν μπορεί να αποδώσει τη συνολική εντύπωση που προκαλεί.

Μπαρόκ : Καλλιτεχνικό ρεύμα του 17^{ου} και 18^{ου} αιώνα που ωστόσο προσδιορίζει και χρονικά αυτή την εποχή (περίοδος Μπαρόκ). Χαρακτηρίζεται από μία υπερβολή στη διακόσμηση και πολυτέλεια, με επιβλητικό και πομπώδες ύφος που απευθύνεται στο συναίσθημα.

της, σε μία ύστατη προσπάθεια να κάνει την αντίθεση με τη φτώχια και την εξαθλίωση της εποχής ακόμη πιο συνταρακτική, διεκδικώντας για τον εαυτό της την εικόνα αυτών που δεν ανήκαν στο γένος των κοινών ανθρώπων, την εικόνα των «εκλεκτών» (Gombrich, οπ.π.). Τελικώς, όσο κι αν αυτή η τακτική καθυστέρησε τις ιστορικές εξελίξεις, η Γαλλική Επανάσταση του 1789 –περίπου έναν αιώνα μετά τα ανάκτορα των Βερσαλλιών- θα καταργήσει τη φεουδαρχία.

Η τέχνη όμως –σπανιότερα δυστυχώς- έχει υπάρξει εργαλείο επικοινωνίας, συνειδητοποίησης και χειραφέτησης στην υπηρεσία κοινωνικών κινημάτων, αφού μέσω της αισθητικής εμπειρίας και της εικόνας δίνεται η δυνατότητα να προσεγγίσουμε ιδέες και καταστάσεις που θα ήταν πολύ δύσκολο να αναλυθούν ερευνητικά, με αμεσότητα και παραστατικότητα.

Σε κάθε περίπτωση πάντως η λειτουργία της τέχνης είναι βαθιά κοινωνική και μάλιστα με μία διττή, αμφίδρομη έννοια. Από τη στιγμή που όλοι μας συνθέτουμε καθημερινά αυτό που ονομάζουμε κοινωνία, τότε η τέχνη απορρέει και καταλήγει στον καθένα μας, σε μικρό ή μεγαλύτερο βαθμό, συνειδητά ή ασυνείδητα. Αφ' ενός ο ίδιος ο καλλιτέχνης, δεν είναι μία απομονωμένη ιδιοφυία, αλλά ένα άτομο μέλος της κοινωνίας, που μοιράζεται με τα υπόλοιπα μέλη της τις ανάγκες, τα οράματα και τους πόνους του. Την παρατηρεί αλλά είναι και κομμάτι της. Αφ' ετέρου, οξυδερκής και δημιουργικός έχει την ικανότητα να μορφοποιεί, να μεταδίδει μέσω των έργων του τα μηνύματα που προσλαμβάνει τροποποιώντας τα σύμφωνα με τις ιδέες τις αντιλήψεις τα συναισθήματα και τη στάση ζωής του. Είναι ταυτόχρονα ισχυρός δέκτης αλλά και πομπός των κοινωνικών παλμών, μηνυμάτων, ιδεολογιών και στάσεων.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της λειτουργίας της τέχνης είναι η καλλιτεχνική και αρχιτεκτονική σχολή Bauhaus της Γερμανίας του μεσοπολέμου. Η Ευρώπη αφήνοντας πίσω της τη belle époque, εξέρχεται από τον Α' Παγκόσμιο πόλεμο με ελπίδες για έναν ανανεωμένο πολιτισμό, για ένα πιο δίκαιο κόσμο βασισμένο σε επιστημονικές, αδιαμφισβήτητες αλήθειες. Είναι η εποχή της ραγδαίας επιστημονικής, τεχνολογικής και βιομηχανικής εξέλιξης. Μέσα από τη δημιουργία της "σχολής του Bauhaus" η Ευρώπη επιχειρεί να συνδέσει τέχνη και επιστήμη, βιομηχανικό σχεδιασμό και παιδεία, ώστε να συνεισφέρουν σε έναν νέο καλύτερο κόσμο (Ξαγοράρης, 1996). Στο Μανιφέστο του ο ιδρυτής της σχολής Walter Gropius γράφει χαρακτηριστικά: *«Δημιουργήστε! .... όλοι μαζί τη νέα κατασκευή του μέλλοντος, που θα έχει ενιαία μορφή. Αρχιτεκτονική, γλυπτική και ζωγραφική, που από εκατομμύρια χειρονομιών ανεβαίνουν προς τον ουρανό, θ' αποτελέσουν το κρυστάλλινο σύμβολο μιας νέας ερχόμενης πίστεως»* (Ξαγοράρης, όπ.π. σελ 60). Δυστυχώς η λειτουργία της σχολής ανεκόπη, με λίγα χρόνια ζωής πίσω της, από τους Ναζί, μετά την ψήφιση του Γερμανικού Εθνικοσοσιαλιστικού Εργατικού κόμματος το 1933, όπως βέβαια και η ίδρυση του νέου, διαυγούς και κρυστάλλινου κόσμου. Παρά το σύντομο χρονικό διάστημα λειτουργίας της σχολής ο απόηχος των ιδεών της φτάνει μέχρι και το σήμερα. Αυτοί πρώτοι οργάνωσαν την

αισθητική έρευνα με επιστημονική μεθοδολογία, έθεσαν ως προτεραιότητα την ανεπηρέαστη και ανεμπόδιστη έκφραση της δημιουργικής πρωτοβουλίας των σπουδαστών της, καλλιέργησαν την ιδέα ότι η τέχνη είναι αναπόσπαστο κομμάτι της ζωής και προώθησαν προϊόντα αισθητικής ποιότητας στη μαζική παραγωγή. (Ξαγοράρης, όπ.π)

Βλέπουμε πως η δύναμη της επιρροής της τέχνης μέσω της εικόνας πάνω στον άνθρωπο –ακόμα και σε αυτούς που φαινομενικά δεν ασχολούνται ή δεν έχουν καμία πρόσβαση σε αυτήν- είναι τελικά καθηλωτική. Όσο «χαλαρή» κι αν είναι η σχέση μας με την τέχνη, αυτή δεν παύει να αποτελεί ένα κοινωνικό εργαλείο αντίληψης της πραγματικότητας και ως εκ τούτου βασικός παράγοντας διαμόρφωσης ιστορικών κοινωνικοπολιτικών εξελίξεων.

Αναμφίβολα λοιπόν η τέχνη, είτε στον δημιουργό, είτε στον αποδέκτη, αφήνει ένα ισχυρό αποτύπωμα. Πόσο ισχυρή είναι όμως αυτή η διάκριση; Κατά πόσο η τέχνη είναι δραστηριότητα μόνο για τους ταλαντούχους, τους προικισμένους, τους δημιουργούς; Μήπως κάθε φορά που προσπαθούμε να συνταιριάξουμε τα ρούχα που θα φορέσουμε, τα κάδρα στον τοίχο, τις λέξεις μας, ή τα λουλούδια στο βάζο, δεν αναζητούμε κι εμείς αυτό που θα δώσει τη ζητούμενη ισορροπία στη φόρμα, στα νοήματα, στα χρώματα; Μήπως δεν είναι κι αυτή η κύρια ασχολία ενός καλλιτέχνη; Σίγουρα δεν τα καταφέρνουμε όλοι το ίδιο καλά σε αυτό ή ακόμα δεν τα καταφέρνουμε με τις μικρές καθημερινές δημιουργίες μας να συγκλονίσουμε ολόκληρο τον κόσμο, αλλά δεν είναι αυτό το ζητούμενο. Το ζητούμενο για τον «μικρό καλλιτέχνη» που κρύβεται μέσα μας είναι να ικανοποιήσει μια βαθύτερη εσωτερική ανάγκη, να αποδώσει ένα προσωπικό νόημα στα πράγματα, έτσι που αυτά να αποκτήσουν μια ξεχωριστή υπόσταση, και φυσικά η αναγνώριση από τους οικείους. Γι' αυτό η διδασκαλία μέσω της τέχνης θεωρούμε ότι θα έχει ισχυρή επίδραση πάνω στους μαθητές. Επιπρόσθετα θα κάνει την εμπειρία πιο ευχάριστη, πιο προσωπική και θα προσφέρει μονιμότερη μαθηματική γνώση.

3. Η Κοινωνική-Πολιτισμική Λειτουργία των Μαθηματικών

Παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο τις πολλαπλές λειτουργίες της τέχνης στην κοινωνία, τον πολιτισμό και τον άνθρωπο, είδαμε πως είναι βαθιά συνδεδεμένη με την ανθρώπινη φύση και πως προϋπήρξε της γλώσσας και της γραφής. Τι γίνεται όμως με τα μαθηματικά; Πόσα μαθηματικά υπάρχουν στον καθένα μας και πόσα μαθηματικά χρειάζονται σε έναν ενήλικα που δεν σχετίζεται άμεσα επαγγελματικά με αυτά; Πότε ήταν οι ανθρώπινες κοινωνίες αρκετά ανεπτυγμένες ώστε να αρχίσουν να τα χρησιμοποιούν; Αν ρωτήσουμε τους μαθητές μας, στη συντριπτική πλειοψηφία τους δεν έχουν συνειδητοποιήσει τη σχέση των μαθηματικών με τον ανθρώπινο πολιτισμό πέρα από την επιστήμη και την τεχνολογία, και όσον αφορά το ερώτημα «από ποιους δημιουργήθηκαν», τότε η απάντηση θα είναι «από μεγαλοφυΐες». Ιδίως τη δεύτερη απάντηση θα την πάρουμε και από ενήλικες, ακόμη και από καθηγητές. Όταν προσπαθούμε να εντοπίσουμε την αρχή των μαθηματικών συνήθως φέρνουμε στο μυαλό μας την Αίγυπτο και τη Μεσοποταμία -μεγάλοι, αγροτικοί πολιτισμοί που είχανε εμπόριο, νομίσματα και αλφάβητο, φαίνεται λοιπόν λογικό να είχαν αναπτύξει κάποιες μαθηματικές γνώσεις. Μόνο που η ιστορία των μαθηματικών ξεκινάει κάπως πιο παλιά. Στην πραγματικότητα, πιο παλιά ακόμη και από το πρώτο αλφάβητο.

Μέχρι το 8.000 π.Χ. στη Γόνιμη Ημισέληνο –μία περιοχή που εκτείνεται από την κατεχόμενη Δυτική όχθη της Παλαιστίνης, έως βόρεια από τη Συρία και νοτιοανατολικά μέχρι το Ιράν- είχαμε αληθινές αγροκαλλιέργειες, δηλαδή κοινότητες που έκαναν ελεγχόμενες καλλιέργειες από σπόρους που διατηρούσαν κάθε χρόνο. Παρήγαγαν πλεόνασμα τροφής, το οποίο έπρεπε είτε να το μοιράσουν κατάλληλα, είτε να το αποθηκεύσουν και να κρατήσουν ένα αρχείο για να εξασφαλίσουν ένα δίκαιο ύστερο μοίρασμα, είτε να το ανταλλάξουν με κοντινές αγροτικές κοινότητες και να εξασφαλίσουν τη διατήρηση της ποσότητας κατά τη διάρκεια του ταξιδιού. Μία αρχαιολόγος, η Denise Schmandt-Besserat, μελετά περίπου 10.000 πήλινους βώλους σε διάφορα, περίεργα σχήματα από 116 διαφορετικές αρχαιολογικές τοποθεσίες, των οποίων η χρήση ήταν μέχρι τότε άγνωστη, και καταλήγει στο εξής συμπέρασμα. Οι βόλοι αυτοί ήταν εργαλεία αρίθμησης και τήρησης αριθμητικών αρχείων, και τους ονομάζει «κουπόνια» (βλ. Εικόνα 6). Τα πρώτα κουπόνια χρονολογούνται από το 8.ooo π.Χ. –δηλαδή πέντε χιλιάδες χρόνια πριν από την πρώτη γραφή- και εξελίσσονται μέσα σε βάθος χιλιετιών από απλά σχήματα και σχέδια έως το 4.400π.Χ. σε πιο πολύπλοκα σχέδια με διακριτικά σημάδια έως το 3.000 π.Χ. «Mathematical Association of America, Mathematical Treasures: Messopotamian Accounting Tokets»

(http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/mathematical-treasures-mesopotamian-accounting-tokens). Αρχικά εξυπηρετούσαν ένα σύστημα αρίθμησης με αντιστοιχία, για παράδειγμα τέσσερις μεζούρες σιτηρών μετρούνταν με τέσσερις σφαίρες ή τρία ωοειδή κουπόνια αντιστοιχούσαν σε τρία κιούπια λάδι. Έπειτα, όσο οι κοινότητες μεγάλωναν, μαζί με το εργατικό δυναμικό, τα αποθέματα αυξάνονταν και το εμπόριο αναπτυσσόταν. Χρειαζόταν λοιπόν ένα κουπόνι που θα περιέγραφε την ποσότητα του εμπορεύματος, θα μπορούσε να συνοδέψει το φορτίο, να αλλάξει χέρια πολλές φορές στη διαδρομή, και τέλος να φτάσει στον παραλήπτη του, χωρίς να είναι δυνατόν να παραποιηθεί το αριθμητικό μήνυμα που μεταφέρει. Αρχικά κάλυπταν τα κουπόνια με πηλό τον οποίο έψηναν και όταν το εμπόρευμα παραδίδονταν στον παραλήπτη, αυτός έσπαγε τον πηλό και εξακρίβωνε αν η ποσότητα του φορτίου που του παραδόθηκε συμφωνούσε με την ποσότητα που περιέγραφε το κουπόνι. Τι γινόταν όμως αν το εμπόρευμα έπρεπε να αλλάξει χέρια στο δρόμο; Πως ο πρώτος φορτωτής θα αποδείκνυε στο δεύτερο φορτωτή ότι του παραδίδει τη σωστή ποσότητα, χωρίς να σπάσει τον πηλό με το κουπόνι; Σ' αυτό λοιπόν το σημείο οι άνθρωποι σκέφτηκαν να χαράξουν πάνω στον πηλό μια εικόνα του κουπονιού, ώστε να μπορεί να επαληθευθεί στη διαδρομή χωρίς να σπάσει. (Clawson, 2005)

Εικόνα 6, Κουπόνια μέτρησης, Ιράκ 4.000 π.Χ. Ο κώνος οι σφαίρες και ο δίσκος είναι μεζούρες δημητριακών, ενώ το τετράεδρο ορίζει μια μονάδα εργασίας, ίσως την εργασία μίας ημέρας. Mathematical Association of America-Mathematical Treasures

Και τότε τι χρειάζονταν τα κουπόνια μέσα στον πηλό; Οι Σουμέριοι πρώτοι κατάλαβαν ότι αυτό ήταν πλέον κάτι περιττό και ότι αρκούσαν τα χαραγμένα σχέδια πάνω στον πηλό για να γίνει η επαλήθευση της ποσότητας του φορτίου, από την αρχή μέχρι το τέλος της διαδρομής (βλ. Εικόνα 7). Καθιέρωσαν λοιπόν τις πήλινες πλακέτες πάνω στις οποίες χάραζαν τα σύμβολα που αντιστοιχούσαν στη μέτρηση της ποσότητας του εμπορεύματος, και έτσι γεννήθηκε η γραφή. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι η γραφή είναι ένα προϊόν μαθηματικών υπολογισμών και εικονικών αναπαραστάσεων! (Clawson, οπ.π.) Και αν κάποιοι υποστηρίζουν ότι η αρίθμηση με αντιστοιχία 1 προς 1 δεν είναι ακριβώς Μαθηματικά, δεν έχουμε παρά να θυμηθούμε την ιστορική διαγώνια μέθοδο του Cantor, που χρησιμοποιώντας μόνο την αρίθμηση με 1 προς 1 αντιστοιχία απέδειξε ότι ο πληθικός αριθμός του συνόλου των ρητών είναι ίσος με τον πληθικό αριθμό των ακεραίων –ότι δηλαδή έχουμε τόσους ρητούς όσους και ακέραιους, ότι το ανοικτό διάστημα (0,1) δεν είναι αριθμήσιμο και ότι ουσιαστικά υπάρχουν διαφορετικά είδη απείρου, επηρεάζοντας σημαντικά τα μαθηματικά αλλά και τη φιλοσοφία.

Εικόνα 7
Πλακέτες από τα Σούσα, Ιράν, περίπου 3200 π.Χ. Κάθε κυκλική απεικόνιση αναπαριστά μία μεζούρα σιτηρών, ενώ οι κωνικές απεικονίσεις παριστάνουν μικρότερες μεζούρες σιτηρών
Mathematical Association of America-Mathematical Treasures

Αν η γραφή λοιπόν και η ανάγνωση είναι ίδιον χαρακτηριστικό του σημερινού ανθρώπου, τι μπορούμε τότε να πούμε για τα μαθηματικά; Πόσο μάλλον που όσον αφορά την ικανότητα μέτρησης και υπολογισμού κάποια προϊστορικά ευρήματα μας πηγαίνουν ακόμη πιο παλιά. Ένα αριθμημένο κόκαλο λύκου 30.000 ετών βρίσκεται σε ανασκαφή στην Μοραβία της Τσεχίας από τον Karl Absolon, πάνω στο οποίο υπάρχουν χαραγμένες 55 ομαδοποιημένες εγκοπές, με τρόπο που υποδηλώνεται ένα πενταδικό σύστημα αρίθμησης (Clawson, οπ.π.) (βλ. Εικόνα 8). Άλλα δύο παρόμοια ευρήματα στην κεντρική και νότια Αφρική, τα γνωστά ως κόκαλο Ishango και κόκαλο Lebombo, ηλικίας 20.000 και 35.ooo χρόνων, αντίστοιχα υποδεικνύουν ότι κάποια ικανότητα αρίθμησης δεν ήταν άγνωστη στον άνθρωπο της Παλαιολιθικής εποχής. Ειδικότερα η φυλή που χάραξε το κόκαλο του λύκου στην Μοραβία θα πρέπει να καταλάβαινε τουλάχιστον την απλή πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.(Clawson, οπ.π.)

Εικόνα 8 Κόκαλο Ishango, σύμφωνα με τις τελευταίες έρευνες εκτιμάται η ηλικία του σε πάνω από 20.000 χρόνια. Εκτίθεται στο Βελγικό Μουσείο Φυσικών Επιστημών στις Βρυξέλλες.

Σίγουρα δεν έχουμε αρκετά στοιχεία για να ξέρουμε ποιες ακριβώς ικανότητες αρίθμησης και υπολογισμού είχε αναπτύξει ο άνθρωπος πριν τη γεωργία, ωστόσο τα παραπάνω ευρήματα διαψεύδουν την παντελή απουσία της. Η θεωρία της Schmandt-Besserat για την δημιουργία της γραφής είναι πλέον η επικρατέστερη και υποστηρίζει ότι η γραφή προήλθε από την εικονική αναπαράσταση αριθμητικών αρχείων. Ολόκληρος ο σημερινός πολιτισμός έχει διαμορφωθεί προχωρώντας παράλληλα με τις μαθηματικές ανακαλύψεις. Η χρήση των μαθηματικών εμφωλεύει στις πιο απίθανες ανθρώπινες δραστηριότητες. Από τις λαϊκές παραδόσεις έως τις ανώτερες θεωρίες. Όταν η γιαγιά διπλώνει στη μέση την ορθογώνια ζύμη της, ώστε να δημιουργήσει το τετράγωνο καλτσούνι της, δεν γνωρίζει πως εφαρμόζει το θεώρημα της διαγωνίου του τετραγώνου που είναι ταυτόχρονα και άξονας συμμετρίας του –το κάνει επειδή της το έδειξε πως «δουλεύει» η δική της γιαγιά. Όταν ο μάστορας καρφώνει ένα καρφί στην πλάκα και δένει πάνω του ένα σχοινί, ενώ με την άλλη άκρη του χαράζει ένα κύκλο, δεν έχει ιδέα ότι δουλεύει πάνω σε ένα από τα πιο δύσκολα για τους μαθητές μας κεφάλαια –τους γεωμετρικούς τόπους, πιθανόν και ο ίδιος να αισθανόταν άβολα με τα μαθηματικά ως παιδί. Η Φιλοσοφία και η Χριστιανική Θρησκεία είναι αξιωματικά θεμελιωμένα συστήματα. Οι εκάστοτε εξουσίες είχαν πάντα στο βάθρο του οπλοστασίου τους την μαθηματική επιστήμη, προσδίδοντάς της την πολιτική της διάσταση. Η τεχνολογία στηρίζεται αλλά και τροφοδοτεί τα μαθηματικά. Η ίδια η ομιλία εμπεριέχει τη λειτουργία της αφαίρεσης, από τη στιγμή που ένας συγκεκριμένος ήχος χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια κλάση αντικειμένων. Αν θα θέλαμε να

διηγηθούμε την ιστορία των μαθηματικών μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο εκτυλισσόταν, θα έπρεπε ουσιαστικά να αφηγηθούμε την ιστορία του ανθρώπου πάνω στη γη. Σύμφωνα με το τελευταίο Α.Π.Σ. του 2011, τα μαθηματικά κατέχουν κεντρική θέση στα προγράμματα σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης εξ' αιτίας *«του εξαιρετικά ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν, της σημαντικής συνεισφοράς στην ανάπτυξη της ατομικής, αλλά και της συλλογικής σκέψης παγκοσμίως, του καθοριστικού ρόλου τους στη γνωστική, ακαδημαϊκή και επαγγελματική ανέλιξη κάθε πολίτη*.» Κι όμως αποδεχόμαστε το γεγονός –ακόμα και αν δεν το αποδεχόμαστε, συνυπάρχουμε με αυτό, πως το μεγαλύτερο κομμάτι του πολιτισμένου κόσμου δεν διατηρεί καθόλου καλή σχέση με τα μαθηματικά, δεν έχει κατανοήσει ποτέ την αξία της απόδειξης, ούτε γνωρίζει τι ακριβώς σημαίνει «αξιωματικά θεμελιωμένο σύστημα». Αυτό όμως, βάσει της παραπάνω σύντομης ανάλυσης, ισοδυναμεί με περιορισμένη αντίληψη του περιβάλλοντα κόσμου και των συσχετισμών του. Είναι λοιπόν σημαντικό να επιστρέψουμε, μέσω της ουσιαστικής διδασκαλίας, στον άνθρωπο αυτό που του ανήκει, αυτό που ο Freudenthal χαρακτηρίζει ως «φυσική ανθρώπινη δραστηριότητα», τα μαθηματικά.

4. Τέχνη και Μαθηματικά

Όπως είδαμε μέχρι τώρα τόσο η τέχνη, όσο και τα Μαθηματικά συγκαταλέγονται στις πρωταρχικές δραστηριότητες του ανθρώπου και συναγωνίζονται την πρωτιά με τη γραφή, ακόμα και με την ίδια τη γλώσσα. Κι όμως ενώ στον πολιτισμένο κόσμο δεν μπορούμε εύκολα να αποδεχθούμε την ύπαρξη ενός αναλφάβητου, υγιούς κατά τα άλλα, ανθρώπου –πόσο μάλλον ενός ανθρώπου που δεν μπορεί να επικοινωνήσει σε καμία γλώσσα- εντούτοις μας φαίνεται ως ένα βαθμό φυσιολογικό το γεγονός ότι μεγάλη μάζα ανθρώπων δεν διατηρούν καλή σχέση με τα Μαθηματικά ή την τέχνη, παρ' όλο που είναι κοινώς αποδεκτό ότι σε ένα βαθμό όλοι οι άνθρωποι χρησιμοποιούν καθημερινά με τον ένα ή τον άλλο τρόπο και τα δύο -επιδίδονται σε διαφόρων ειδών Μαθηματικούς υπολογισμούς, εξασκούν τη λογική τους βγάζοντας συμπεράσματα από δεδομένα, διαμορφώνουν με το προσωπικό τους γούστο τον χώρο γύρω τους.

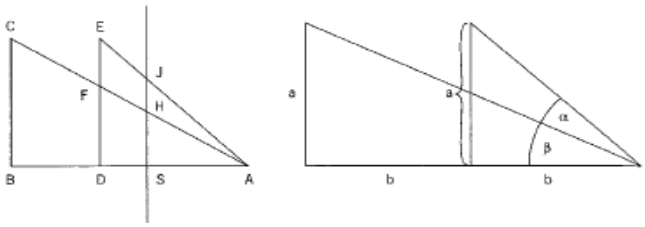
Ακόμη πιο φυσιολογικό μας φαίνεται το γεγονός πως τα δύο δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους και πως ενώ το ένα απευθύνεται στη λογική, το άλλο απευθύνεται στο συναίσθημα, και πως αυτά τα δύο φυσικά είναι δύο τελείως διαφορετικά πράγματα ή ακόμα και εκ διαμέτρου αντίθετα. Ωστόσο η τέχνη με τα Μαθηματικά μπορούν να συνομιλούν δίνοντάς μας εκπληκτικά αποτελέσματα και τελικά μάλλον η συνάφειά τους είναι πιο ισχυρή από ότι φανταζόμαστε.

Α. Τα Μαθηματικά στην Τέχνη

Αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο την ταυτόχρονη εξέλιξη Μαθηματικών και τέχνης στην αρχαία Ελλάδα, ως συνέχεια και εξέλιξη των Μαθηματικών και της τέχνης των αρχαίων Αιγυπτίων. Σχετίζεται η ανάπτυξή τους ή πρόκειται για δύο διαφορετικά πεδία που αναπτύχθηκαν αυτόνομα, στα πλαίσια μιας ακμάζουσας κοινωνίας;

Ο Θαλής τον 6^{ο} π.Χ. αιώνα εισάγει τη θεωρία των αναλογιών και μέχρι τα Στοιχεία του Ευκλείδη έχουμε θεωρήματα με εφαρμογές στην Αστρονομία, κατ' επέκταση λοιπόν και στην Τριγωνομετρία (Struik, 2008). Η Γεωμετρία ανθεί στην κλασσική περίοδο και χρησιμοποιείται στην αρχιτεκτονική, τη γλυπτική και τη ζωγραφική. Εκτός από τη βράχυνση που προαναφέραμε, οι αρχαίοι Έλληνες φαίνεται πως χρησιμοποιούν ένα είδος προοπτικής στη ζωγραφική τους, τη γωνιακή προοπτική που είναι άμεσα συνδεδεμένη, τόσο με τις αναλογίες, όσο και με την τριγωνομετρία (Panofski, 1996) (Βλ. εικόνα 9). Η Χρυσή Τομή, διαίρεση ενός τμήματος με χρήση κανόνα και διαβήτη

σε δύο τμήματα σταθερού λόγου $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ήδη γνωστή από τους Πυθαγόρειους, χρησιμοποιείται επίσης στην αρχαία ελληνική Τέχνη με χαρακτηριστικό παράδειγμα τον Παρθενώνα του οποίου οι αναλογίες έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης παγκοσμίως. Ο Πλάτωνας ορίζει ως «ωραία καθ' εαυτά σχήματα» τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα, τα στερεά και τις εκ περιστροφής επιφάνειες (Ξαγοράρης, οπ.π.). Από τους προσωκρατικούς ακόμα φιλοσόφους κυριαρχεί η αντίληψη πως η επιστήμη και η φιλοσοφία είναι συνυφασμένες με την καλλιτεχνική αναζήτηση.

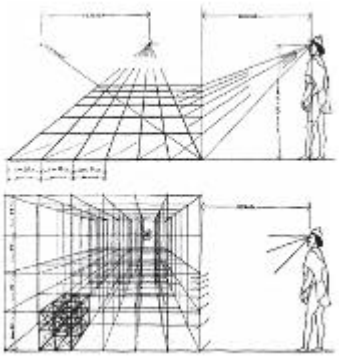


Εικόνα 9. Αντιπαραβολή Γραμμικής και Γωνιακής Προβολής: Στο αριστερό σχήμα (Γραμμική προοπτική) τα φαινόμενα μεγέθη (HS και JS) είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αποστάσεις(AB και AD). Στο δεξί σχέδιο (Γωνιακή Προβολή), τα φαινόμενα μεγέθη (β και α+β) δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αποστάσεις (b και 2b). Η χρήση της γραμμικής προβολής, παρ' όλο που υπάρχουν οι απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις, δεν χρησιμοποιείται από τους Αρχαίους Έλληνες. Σύνθετοι κοινωνικοοικονομικοί παράγοντες συμβάλλουν ώστε να χρησιμοποιηθεί σχεδόν δύο χιλιετίες μετά, στην Αναγέννηση.

Τον 15^{ο} αιώνα, με την πτώση του Βυζαντίου, αρχαία ελληνικά Φιλοσοφικά και Μαθηματικά κείμενα ταξιδεύουν στην Ευρώπη και, με την βοήθεια της πρωτοεμφανιζόμενης τότε τυπογραφίας, διαδίδονται ευρέως (Gombrich, οπ.π.). Οι νεοσύστατες ευρωπαϊκές πόλεις έχουν ήδη αρχίσει να επικοινωνούν με το μέχρι τότε κέντρο του πολιτισμένου κόσμου, την Ανατολή, άλλοτε χάριν εμπορικών συναλλαγών και άλλοτε χάριν των σταυροφοριών. Ο Ευρωπαίος επιστήμονας που ακολουθεί πάντοτε τον έμπορο ή το στρατό, έρχεται σε επαφή με την Αραβική Άλγεβρα και τη συνδυάζει με τη «Γεωμετρική Άλγεβρα»* των αρχαίων Ελλήνων (Struik, οπ.π.). Η επιστήμη αναγεννάται, μαζί της και οι Τέχνες. Οι θεοκρατικές αντιλήψεις του Μεσαίωνα υποχωρούν και δίνουν τη θέση τους στην επιστημονική αναζήτηση της φύσης. Οι ζωγράφοι της εποχής ξεφεύγουν από τις θρησκευτικές αναπαραστάσεις και αναζητούν τη ρεαλιστικότερη αποτύπωση του φυσικού κόσμου (Φίλη Χ. 2000) Εισάγουν λοιπόν την Τρίτη διάσταση στα έργα τους –το βάθος- με την τεχνική της Γραμμικής Προοπτικής. Αναμφίβολα πρόκειται για έναν από τους μεγαλύτερους σταθμούς στην Τέχνη, όλων των εποχών.

«Γεωμετρική Άλγεβρα» όρος που χρησιμοποιήθηκε από τον μαθηματικό Georg Zeuthen για να υποδηλώσει τις αλγεβρικές σχέσεις που κρύβονταν πίσω από τα θεωρήματα περί ισότητας εμβαδών του Ευκλείδη.

Η τεχνική όμως της Γραμμικής Προοπτικής απαιτεί πολύ βαθιές γεωμετρικές γνώσεις και έτσι βρίσκουμε, εκτός από Αρχιτέκτονες και Μηχανικούς που τα μαθηματικά τους είναι ούτως ή άλλως απαραίτητα, και πολλούς ζωγράφους να μελετούν τα Στοιχεία του Ευκλείδη, να συγγράφουν πραγματείες για τη Γεωμετρία εφαρμοσμένη στη Ζωγραφική και όλα αυτά σε ένα αυστηρό πλαίσιο αποδείξεων (Φίλη, οπ.π.). Είναι τότε που θα κάνει την εμφάνισή του ο Homo Universalis, ο πολυεπιστήμονας, ο οποίος είναι και καλλιτέχνης, και επιστήμονας, και φιλόσοφος. Ο καμβάς διατάσσεται, συστηματοποιείται και δεν είναι υπερβολή να πούμε πως οι ζωγράφοι της εποχής, εκτός από αφοσιωμένοι μελετητές είναι και δημιουργικοί ερευνητές των Μαθηματικών της εποχής.



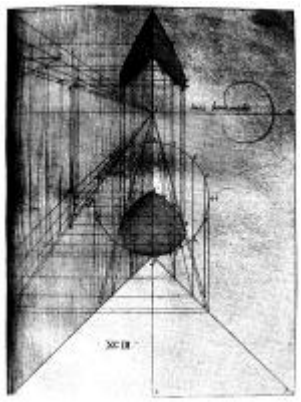
Εικόνα 10
Ο καμβάς του Alberti

Πρωτοπόρος της τεχνικής της Γραμμικής Προοπτικής στη ζωγραφική θεωρείται ο ιδιοφυής Tommaso di Giovanni (Masaccio), ο οποίος επηρεασμένος από τις μαθηματικές ανακαλύψεις του αρχιτέκτονα φίλου του Brunelleschi δίνει τους πρώτους πίνακες με το καινούριο «θαύμα», την αίσθηση του βάθους. Στο μεταξύ ένας νεαρός φοιτητής νομικής και μαθηματικών, ο Leon Battista Alberti, ο οποίος στον ελεύθερο χρόνο του ασχολείται και με τη ζωγραφική (βλ. Εικόνα 10), συγγράφει την πραγματεία του Della Pittura,την οποία αφιερώνει ανάμεσα σε άλλους και στον Masaccio. Στο πρώτο μέρος παραθέτει οδηγίες για τη γραμμική προοπτική τις οποίες δανείζεται από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και τις αναμορφώνει έτσι ώστε να απευθύνονται αποκλειστικά σε καλλιτέχνες ζωγράφους. Στη συνέχεια, εμφανώς επηρεασμένος από τα «Στοιχεία», συγγράφει τη δεύτερη πραγματεία του για τις αναλογίες Elements di Pittura, στην οποία συνδέει την προοπτική με τις γεωμετρικές αναλογίες (Φίλη, οπ.π.). Στο μεταξύ οι ζωγράφοι της εποχής ασχολούνται πλέον με τις διάφορες όψεις του ορατού οι οποίες μπορούν να αποτυπωθούν «ξεγελώντας» την όραση, και όλα αυτά είναι εφικτά μόνο με «κανόνα και διαβήτη», με μία σε βάθος μαθηματική γνώση και μία δημιουργική εφαρμογή της.

Φωτεινό παράδειγμα αυτής της εποχής είναι ο Ιταλός ζωγράφος, αρχιτέκτονας, γλύπτης, μηχανικός, ανατόμος, γεωμέτρης, εφευρέτης και μουσικός Leonardo Da Vinci. Απόλυτα προσηλωμένος στους Γεωμετρικούς κανόνες, με την πεποίθηση πως τα Μαθηματικά αποτελούν τη θεμελίωση της Τέχνης μας δίνει το αξεπέραστο έργο του – τοιχογραφία στην τραπεζαρία της Μονής Santa Maria Delle Grazie- «Μυστικός Δείπνος» (Gombrich, οπ.π.) (βλ. Εικόνα 11). Μπορούμε να φανταστούμε το δέος των μοναχών στα αποκαλυπτήρια όπου για πρώτη φορά αντίκρισαν το περίεργο φαινόμενο της «επέκτασης» του χώρου της τραπεζαρίας τους.

Δεν πρέπει να σκεφτούμε όμως ότι ο Λεονάρντο Ντα Βίντσι ήταν μία εκρηκτική εξαίρεση της εποχής του. Σε πολλούς άλλους ζωγράφους θα μπορούσε να αποδοθεί επάξια ο τίτλος του Μαθηματικού, όπως οι Paolo Uccello, Albrecht Durer, Piero della Francesca, Samuel Marolois, Jean-François Niceron. (Panofski & Φίλη). Επιδιώκοντας μία επιστημονική προσέγγιση στη ζωγραφική, μελέτησαν την Οπτική και τα Μαθηματικά και εξέδωσαν πραγματείες. Έναν αιώνα αργότερα, προκειμένου εκτός από το βάθος, να αντιμετωπίσουν και το πρόβλημα της σκιάς (βλ. Εικόνα 12), πολλοί ζωγράφοι βρίσκονται να μελετούν τον Μαθηματικό Girard Desargues και τα πρώτα του ψήγματα για αυτό που αργότερα θα εξελισσόταν ως Παραβολική Γεωμετρία. Το πρόβλημα της σκιάς τελικά θα βρει τη λύση του στη θεωρία της Διαφορικής Γεωμετρίας. Ο Μαθηματικός Gaspard Monge θα γράψει: «Το πρόβλημα της σκιάς και της Παρασκιάς καταλήγει στην εύρεση των εξισώσεων δύο αναπτυκτών επιφανειών οι οποίες μπορούν να είναι ταυτόχρονα περιγεγραμμένες σε δύο δοθέντα σώματα» (αναφορά από Φίλη, οπ.π.). Βέβαια η δουλειά του καλλιτέχνη είναι κάτι περισσότερο από την οργάνωση του χώρου και την αποτύπωση της τρίτης διάστασης. Έτσι, μεγάλοι καλλιτέχνες ακολουθούν, οι οποίοι διδάσκονται βέβαια τις δουλειές των προκατόχων τους, αλλά επιλέγουν να αντιμετωπίζουν αυτά τα θέματα περισσότερο διαισθητικά.

Εικόνα 11
«Ο Μυστικός Δείπνος»
Leonardo Da Vinci, 1495-1498



Εικόνα 12 Samuel Malorois Μελέτη σφαιρικού αντικειμένου, καθώς ρίχνει τη σκιά του σε κεκλιμένα επίπεδα.

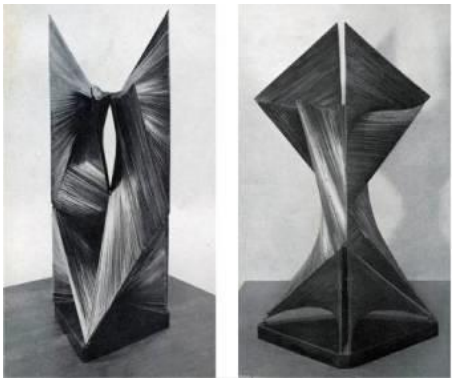
Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα μία καινούρια έκπληξη έρχεται να ταράξει τα ήδη ταραγμένα νερά της Τέχνης. Οι εργασίες του Einstein και του Minkowski ενώνουν τον τρισδιάστατο χώρο με την έννοια του χρόνου στο ρόλο μιας τέταρτης διάστασης, αποκαλύπτοντας σε κοινή θέα το «Χωροχρόνο». Καλλιτέχνες όπως ο Picasso, ο Braque,

ο Dali και ο Duchamp, ενσωματώνουν στα έργα τους την καινούρια επαναστατική Θεωρία. Στο έργο του Marcel Duchamp «Γυμνό που κατεβαίνει τη σκάλα» βλέπουμε τη πρόθεση του καλλιτέχνη να αιχμαλωτίσει τις διαφορετικές θέσεις του Γυμνού στο χώρο και στο χρόνο έχοντας σαν σύστημα αναφοράς μια σκάλα (βλ. Εικόνα 13). Εκτός όμως από κάποιες προσπάθειες εισαγωγής της τέταρτης διάστασης στον καμβά, οι καλλιτέχνες της σύγχρονης Τέχνης κάνουν άλλο ένα μεγάλο άλμα. Απορρίπτουν τον Ματουραλισμό –τη ρεαλιστική δηλαδή αναπαράσταση του χώρου- και επιδιώκουν μια Τέχνη «καθαρής φόρμας», όπου κυριαρχεί η αφαίρεση. Κυβιστές, Σουπρεματιστές, Νεοπλαστικιστές, Φουτουριστές, οδηγούν την τέχνη προς μία αφηρημένη μορφολογία, εφαρμοσμένη πάνω σε καθαρά γεωμετρικά σχήματα, που – σύμφωνα με τον P.C. Mondrian, «εκφράζουν με καθαρά Πλαστικά μέσα την καθαρή πραγματικότητα». Η καθαρή πραγματικότητα όμως παύει να είναι απότοκο **εμπειρίας** και προσεγγίζεται πλέον από μία αφαιρετική οπτική, που επιχειρεί να αποτυπώσει την ιδέα, την **αναλλοίωτη** ουσία των πραγμάτων. Είναι η γέννηση της σύγχρονης αφηρημένης Τέχνης (Ξαγοράρης, οπ.π.).

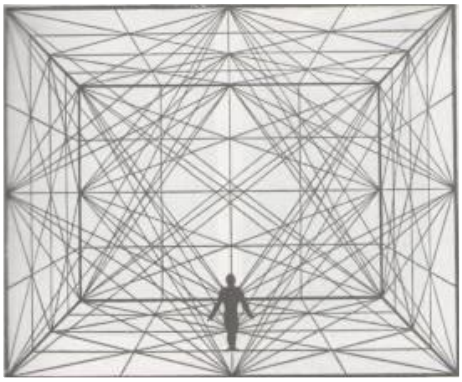
Εικόνα 13
" Γυμνό που κατεβαίνει τη σκάλα",
Marcel Duchamp, 1912

Στο μεταξύ στα μαθηματικά έχουν αναπτυχθεί πλήρως οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες του χώρου -Ελλειπτική, Υπερβολική, όπου οι μαθηματικοί εγκαταλείπουν επίσης τα **εμπειρικά** αξιώματα των σχημάτων του επιπέδου. Η έννοια του τοπολογικού μετρικού χώρου κερδίζει έδαφος, καθώς μελετάει τα βαθύτερα χαρακτηριστικά των μαθηματικών αντικειμένων, τις **αναλλοίωτές** τους ιδιότητες, καθώς αυτά υπόκεινται σε παραμορφώσεις. (Ξαγοράρης οπ.π. & Φίλη οπ.π.)

Η θεωρία Ομάδων του E.Galois χρησιμοποιείται σε αναλύσεις έργων τέχνης και κυρίως στη διακοσμητική από τον A.Speiser. Οι αισθητικές δυνατότητες των κωνικών τομών, του κύβου, της σφαίρας, διερευνούνται από πλειάδα καλλιτεχνών –από τους κονστρουκτιβιστές ως τον V. Vasarely. Γλύπτες όπως οι R. Lippold, M. Bill, N. Gabo, A. Pevsner δημιουργούν με αναπτυκτές και μη αναπτυκτές ευθειογενείς επιφάνειες (Κουτρουφιώτης, 2006 & Ξαγοράρης οπ.π.), (βλ. Εικόνα 14). Η συμβολή της σχολής Bauhaus, που όπως έχουμε προαναφέρει επιχειρούσε μεταξύ άλλων να συνενώσει την τέχνη με την επιστήμη, είναι επίσης καθοριστική. Ο W.Kandinsky διδάσκει τη σημασιολογία των γραμμών και των σχημάτων, ο P.Klee αντιμετωπίζει τις γραμμές και τις επιφάνειες ως αποτέλεσμα κίνησης σημείων και γραμμών. Στο τμήμα σκηνογραφίας της σχολής, προκειμένου να τονίσουν την ιδέα του χώρου δημιουργούν ένα τρισδιάστατο δίκτυο αλληλοτεμνόμενων ευθειών και τοποθετούν την ανθρώπινη φιγούρα στο κέντρο του (Ξαγοράρης, οπ.π.) (βλ. Εικόνα 15).



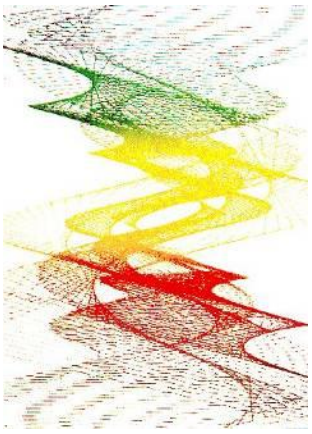
Εικόνα 14,
Αναπτυκτές Επιφάνειες, A. Pevsner, 1938



Εικόνα 15, "Γραμμικός Χώρος με φιγούρα"
Oscar Schlemmer, Τμήμα Σκηνογραφίας, Bauhaus

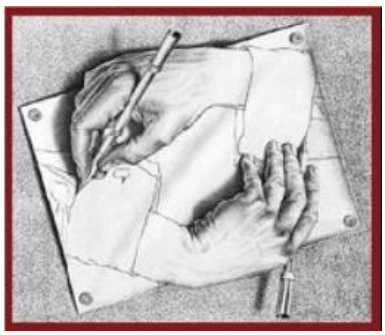
Σε κάθε τμήμα του Bauhaus κυριαρχεί η γεωμετρική αφαίρεση, προσαρμοσμένη σε λειτουργικά έργα μαζικής μάλιστα χρήσης.

Μετά τον Β' Παγκόσμιο πόλεμο, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής προσφέρει νέες, ασύλληπτες έως τότε, δυνατότητες σχεδίασης και χρησιμοποιείται ως τεχνικό μέσο καλλιτεχνικής έκφρασης. Δημιουργείται το 1967 το Κέντρο Προωθημένων Οπτικών-Εικαστικών Σπουδών (C.A.V.S.) του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Μασαχουσέτης (M.I.T.) με σκοπό τη συνεργασία καλλιτεχνών, επιστημόνων και μηχανικών. Ο μετέπειτα Διευθυντής του Τομέα Αρχιτεκτονικής Γλώσσας, Επικοινωνίας και Σχεδιασμού του Ε.Μ.Π. εικαστικός – μαθηματικός Π. Ξαγοράρης θα βρεθεί στο C.A.V.S. ως συνεργάτης ερευνητής. Δουλεύοντας πάντα και τα προσωπικά του έργα, θα επιστρέψει στην Ελλάδα προσπαθώντας να διαλύσει μια προκατάληψη: Να αναδείξει την αισθητική αξία των Μαθηματικών ανακαλύψεων και να τονίσει την αναγκαιότητα σύνδεσης της επιστήμης και της τεχνολογίας, συμπεριλαμβανομένων και των υπολογιστών, με την καλλιτεχνική δημιουργία (βλ. Εικόνες 16, 17).



Εικόνες 16, 17 Παντελής Ξαγοράρης, από τη σειρά "Πλαστικές Τέχνες, Υπολογιστές & Ολογράμματα", Ε.Μ.Π. Τμήμα Αρχιτεκτονικής.

Στο μεταξύ η οριστική αποσύνδεση της τέχνης από τη ρεαλιστική αναπαράσταση του κόσμου, δίνει πια την ευχέρεια στους καλλιτέχνες να αποτυπώνουν στα έργα τους τις ιδέες, των πραγμάτων. Παράλληλα η μαθηματική επιστήμη αναπτύσσεται ταχύτατα σε ολοένα και πιο αφηρημένους τόπους και πολλοί καλλιτέχνες γοητεύονται από τα επιτεύγματά της. Καλλιτεχνικά ρεύματα όπως η εννοιολογική τέχνη (Conceptual Art) και η Op art (Optical Art) θα ενσωματώσουν στα έργα τους μαθηματικές έννοιες και ιδέες (Μουσείο Ηρακλειδών http://www.herakleidon-art.gr/el/index.cfm & Ξαγοράρης, οπ.π.). Ο αμερικανός καλλιτέχνης Sol LeWitt, εκτός από τα γεωμετρικά σχήματα θα χρησιμοποιήσει την ισομετρική προβολή, ώστε να προσδώσει στα δυσδιάστατα έργα του την εντύπωση της τρισδιάστατης μορφής. Ο Ούγγρος Victor Vassarely μέσα από γραμμικά πρότυπα δημιουργεί στους πίνακές του την οπτική ψευδαίσθηση της κίνησης. Και οι αναφορές θα μπορούσαν να συνεχίζουν σε αναρίθμητες σελίδες (Ξαγοράρης οπ.π.). Στέρεη όμως γέφυρα επικοινωνίας μεταξύ τέχνης και μαθηματικών χτίζει ο ολλανδός χαράκτης και γραφίστας Maurits Cornellis Escher. Περισσότερο δημοφιλής σε επιστήμονες και μαθηματικούς από ότι σε κριτικούς τέχνης, ο M. C. Escher δουλεύει με τις ιδέες της υπερβολικής γεωμετρίας, με την κανονική διαίρεση του επιπέδου και τις 17 ομάδες συμμετρίας του, δίνοντάς μας τα έργα του που χαρακτηρίζονται από τη συμμετρική επικάλυψη του επιπέδου με επαναλαμβανόμενα σχήματα. Θα τον απασχολήσουν τα θέματα της Τοπολογίας και θα αποδώσει με έξοχο τρόπο το παράδοξο της Μαθηματικής Λογικής που γεννάται από αυτοαναφορικές προτάσεις με το έργο του “Drawing Hands” (Παπανικολάου, 2005) (Βλ. Εικόνα 18). Ασχολήθηκε επίσης και με την αυτοομοιότητα, βάζοντας από τους πρώτους λίθους σε αυτό που αργότερα, με την αποφασιστική συμβολή του μαθηματικού Benoît B. Mandelbrot θα εξελισσόταν ως τη γεωμετρία μορφοκλασματικής μορφής, δηλαδή τη Φράκταλ γεωμετρία ή αλλιώς γεωμετρία της φύσης, με εφαρμογές από τη βιολογία και την αστρονομία έως τα χρηματιστήρια αξιών και το σχεδιασμό ψηφιακών δικτύων.



Εικόνα 18,
M. C. Escher "Drawing Hands",
Ο Έσερ με αυτό το έργο του θίγει το παράδοξο της αυτοαναφορικότητας. Η ιδέα πίσω από αυτό το έργο είναι «Το χέρι του ζωγράφου μπορεί να απεικονίσει τα πάντα».

Οι υπολογιστές, σε δικαίωση των ιδεών του καθηγητή Π. Ξαγοράρη, θα διαδραματίσουν αποφασιστικό ρόλο σε αυτή τη τροπή της τέχνης. Η ψηφιακή τέχνη χρησιμοποιεί πλέον διανυσματικά γραφικά (Scalable Vector Graphs, αρχεία SVG). Οι γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, και οι αναπαραγωγές, οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις τους γίνονται με τη βοήθεια συντεταγμένων. Τα σχήματα αποθηκεύονται χρησιμοποιώντας τους γεωμετρικούς τους ορισμούς και οι αποχρώσεις υπολογίζονται βάση των τιμών των μεταβλητών τους. Ο χώρος και η φόρμα καθορίζονται πάνω σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Η Δικτυακή Πύλη για το

Εκπαιδευτικό Λογισμικό Ανοιχτού Κώδικα προτείνει το Inkscape, για τις θεματικές ενότητες «Ζωγραφική & Επεξεργασία Εικόνας», το οποίο έχει όλες τις παραπάνω δυνατότητες. Η Αναρωτιόμαστε λοιπόν, γιατί όχι και σε σχέση με τη διδασκαλία των μαθηματικών;

Η συνομιλία λοιπόν τέχνης, μαθηματικών μας δίνουν αριστουργήματα –σταθμούς στην ιστορία τόσο των επιστημών όσο και των τεχνών. Επιπλέον, μαζί με την είσοδο της ψηφιακής τεχνολογίας οι δυνατότητες πολλαπλασιάζονται και η άλγεβρα χρησιμοποιείται εξίσου στην δημιουργία μαθηματικών-καλλιτεχνικών έργων, όσο και η Γεωμετρία. Αντικείμενα, είτε μαθηματικού, είτε σχεδιαστικού ενδιαφέροντος γίνονται ιδιαίτερα δημοφιλή στο ευρύ κοινό και πιο προσιτά στον καθένα από ποτέ.

Β. Η Τέχνη στα Μαθηματικά

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως η άνθιση των Μαθηματικών συνέβαλε στην εξέλιξη νέων μορφών τέχνης και αντίστροφα, το ρόλο της τέχνης στην ανάδειξη Μαθηματικών ζητημάτων και την προσφορά δημιουργικών ερεθισμάτων. Ναι, η τέχνη έχει λειτουργήσει ενίοτε ως κινητήρια δύναμη στην εξέλιξη της Μαθηματικής επιστήμης και θα μπορούσαμε να μιλάμε για αμφίδρομη σχέση μεταξύ των δύο. Μεγάλοι Μαθηματικοί το επιβεβαιώνουν και αποκαλύπτουν έναν ακόμη, διττό ρόλο της Τέχνης στα Μαθηματικά. Έναν από τη σκοπιά του δημιουργού – ερευνητή και έναν από τη σκοπιά του αποδέκτη – μαθητευόμενου.

> *«Τα Μαθηματικά αν κοιταχτούν σωστά, χαρακτηρίζονται από ύψιστη ομορφιά, ψυχρή και αυστηρή σαν εκείνη των γλυπτών, που δεν απευθύνεται στις ασθενέστερες πλευρές της φύσης μας, που της λείπουν τα γοητευτικά παραφερνάλια της ζωγραφικής και της μουσικής, κι όμως εξαίσια αγνή και ικανή για μια απρόσβλητη τελειότητα, τέτοια που μόνο τα μεγαλύτερα έργα Τέχνης έχουν να δείξουν. Το αληθινό πνεύμα της απόλαυσης, την ανάταση, την αίσθηση πως είναι κανείς κάτι παραπάνω από άνθρωπος, αυτό το κριτήριο της απαράμιλλης ανωτερότητας το βρίσκουμε στα Μαθηματικά όχι λιγότερο από ότι στην ποίηση.»*
>
> ***Bertrand Russell***

Βέβαια αυτή είναι μια άποψη του Russell και την παρουσιάζουμε για να θίξουμε, από τη σκοπιά του αποδέκτη – μαθητευόμενου, το αν η ενασχόληση με τα Μαθηματικά έχει τελικά κάποια κοινά σημεία με την καλλιτεχνική αντίληψη και δραστηριότητα.

Πριν ξεκινήσουμε όλη αυτή τη συζήτηση θα έλεγε κανείς πως η μόνη προφανής σχέση τέχνης – Μαθηματικών είναι η συμμετρία, ή οι αναλογίες, με άμεση εφαρμογή μόνο στη γεωμετρία και μάλιστα σε συγκεκριμένες ενότητες. Θεωρούμε πως η αντίληψη αυτή αποτελεί πλέον κοινοτυπία καθώς αν εξετάσουμε το ρόλο της «*αίσθησης της συμμετρίας*» λίγο καλύτερα, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι μία εσωτερικευμένη αίσθηση συμμετρίας μας βοηθά να κωδικοποιήσουμε έναν τεράστιο, φαινομενικά ασυνάρτητο μαθηματικό τύπο ή να χαρακτηρίσουμε έναν άλλον τύπο κομψό ή όμορφο.

Για παράδειγμα, τι είναι αυτό που μας κάνει να κωδικοποιούμε τόσο εύκολα, τις παρακάτω αναγκαίες συνθήκες για τις ακέραιες μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών;

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_y \end{cases} \qquad \text{και} \qquad u_{xx} + v_{yy} = 0$$

Τι είναι αυτό που δρα πρώτο κάθε φορά που πρέπει να τις ανακαλέσουμε; Η λογική ή ένα νοητό – οπτικοποιημένο σχήμα που μας δίνει μια αίσθηση ισορροπίας μεταξύ των μαθηματικών όρων που εμφανίζονται; Βέβαια το ζητούμενο είναι ένας τέτοιος τύπος να εκλογικευτεί πλήρως ως προς τη λειτουργία και το μήνυμα που μεταφέρει. Αν δούμε όμως την απομνημόνευσή του ως εικόνα σαν ένα μεταβατικό στάδιο προς την κατανόηση, τότε αυτό δεν μπορεί να προέλθει παρά από μια βαθύτερη αίσθηση τάξης, συμμετρίας και αρμονίας των αντικειμένων. Αυτό όμως δεν είναι κάτι που καλλιεργείται πολύ ευχάριστα και αποτελεσματικά μέσω της τέχνης και της καλλιτεχνικής δραστηριότητας;

Τι είναι αυτό που μας κάνει πάντα να αναζητούμε μια «κομψή» απόδειξη για τους μαθητές μας; Μήπως δεν είναι μία προσωπική μας ανάγκη για τάξη και ομορφιά, συνεπικουρούμενη από μία ελπίδα πως έτσι η απόδειξη θα είναι πιο εύκολη και πιο ευχάριστη στην κατανόηση από τους μαθητές;

Από αυτή την άποψη, τα μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν, εκτός από λογική δραστηριότητα, και ως αισθητική εμπειρία. Αυτό ακριβώς αποζητούσαν άλλωστε και οι Αρχαίοι Έλληνες όταν προσπαθούσαν να θεμελιώσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους πάνω σε ένα σύστημα λογικής. Γι' αυτούς τα Μαθηματικά δεν ήταν ένα εργαλείο, δεν ήταν ένα μέσο για την κυριαρχία τους επί της φύσης, αλλά ένα μέσο για την αποκάλυψη της ομορφιάς των δομών του φυσικού κόσμου γύρω τους (Kline, 1981). Ένα θεώρημα ή μία απόδειξη είχαν σαν στόχο την ανάδειξη της ομορφότερης λύσης, και αυτή η δραστηριότητα κάλυπτε μια αισθητική ανάγκη.

Τι είναι αυτό που θα κάνει τους μαθητές μας, όταν διδαχθούν πως :

- Η εξίσωση $y = ax$ παριστάνει μιαν ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων
- Η εξίσωση $y = ax + \beta$ παριστάνει μιαν ευθεία που δεν περνάει από την αρχή των αξόνων
- Η εξίσωση $y = ax^2$ παριστάνει μια παραβολή

να αναρωτηθούν από μόνοι τους τι είδους γραμμή θα παριστάνει η εξίσωση $y = ax^2 + \beta$;

Είναι μια μαθηματική διαίσθηση, μία αντίληψη της ισορροπίας της φόρμας. Και τέτοιου είδους «επιτεύγματα» καλλιεργούν στο παιδί την πεποίθηση πως τα Μαθηματικά μπορούμε μαζί να τα συνθέσουμε, πως ο καθηγητής δεν είναι αυτός που κρύβει κάθε μέρα τη λύση και ζητά από τους μαθητές του να τη βρουν, αλλά πως τους δίνει στοιχεία που μπορεί να τα συνδυάσουν, να τα αναδιατάξουν, να αναπαράγουν άλλα στοιχεία από αυτά, γιατί όχι να παίξουν μαζί τους και στο τέλος να δημιουργήσουν ένα δικό τους έργο, μια απάντηση.

Είναι επίσης η **φαντασία** που δεν έχει παραγκωνιστεί από τον αδιαμφισβήτητο κόπο που απαιτείται για τη μάθηση των μαθηματικών. Είναι η πρόκληση σε κάτι που το παιδί αντιλαμβάνεται ως προσιτό**,** ως κάτι που το αφορά προσωπικά και όχι σαν μία θεωρία που αναπτύχθηκε από ανθρώπους διάνοιες, διαφορετικούς από το ίδιο και από όσους ποτέ θα γνωρίσει. Τόσο ο μαθηματικός, όσο και το παιδί, όταν αναζητούν μία αποδεικτική μέθοδο ή προσπαθούν να διακρίνουν τι είναι αυτό που θέλουν να αποδείξουν επιστρατεύουν παράλληλα με τις γνώσεις τους: **φαντασία, δημιουργική ικανότητα και διαίσθηση**.

Τι είναι αυτό που θα κάνει τον μαθητή στο ξεκίνημα της Α' Λυκείου, να μπορεί να λύσει μία ρητή εξίσωση, μετά τις καλοκαιρινές διακοπές ή έστω να μπορεί να διακρίνει τους όρους της; Η ανάκληση της μεθοδολογίας ή **μία γενικευμένη αίσθηση τάξης και συμμετρίας**, που τόσο αντιπροσωπευτικά περιγράφουν τη μαθηματική επιστήμη; Τι είναι αυτό που θέλουμε να κρατήσει ο μαθητής όταν, ενήλικος πια, θα αφήσει το σχολείο; Τη μεθοδολογία επίλυσης ρητών εξισώσεων ή αυτήν ακριβώς την αίσθηση της τάξης, της συμμετρίας; Ο Αριστοτέλης γράφει *«Του δε καλού τα σπουδαιότερα είδη είναι η τάξη, η συμμετρία και η ακρίβεια, πράγματα με τα οποία ασχολούνται ιδιαίτερα οι μαθηματικές επιστήμες»* (Μετά τα φυσικά, Μ 3, 1078 b), (αναφορά από Davis – Hersh, 1981)

Δεν μπορούμε επίσης να παραλείψουμε ένα άλλο βασικό κίνητρο για τη μάθηση των μαθηματικών, την ευχαρίστηση που μπορεί να αντλήσει κάποιος από τη μαθηματική δραστηριότητα. Τόσο ο M. Kline, όσο και οι D.J. Davis, R. Hersh υπογραμμίζουν την ύπαρξη αυτής της ευχαρίστησης και εξηγούν πως εν μέρει οφείλεται στην **τάξη**, την **αρμονία** που αντικαθιστά το χάος. Το σχέδιο που ανακαλύπτουν ή επιβάλουν τα

μαθηματικά στη φύση προκαλεί έκπληξη, «*και η έκπληξη δίνει τη θέση της στην ευχαρίστηση και η ευχαρίστηση δίνει διέξοδο στα αισθήματα ότι το σύμπαν είναι ενωμένο με ένα θαυμαστό τρόπο*» (Davis – Hersh, οπ.π. σελ 175).

Βλέπουμε λοιπόν τη διαίσθηση, την αντίληψη την ισορροπία της φόρμας, τη φαντασία, την αίσθηση της τάξης και της συμμετρίας -χαρακτηριστικά σύμφυτα με την τέχνη, πόσο απαραίτητα είναι για την μάθηση των μαθηματικών. Όταν γνωρίζουμε πώς να εκτελούμε μια μαθηματική διαδικασία και ξαφνικά ανάβει μία εσωτερική σπίθα, φωτίζοντας όλη τη σημασία, τη λειτουργία και τη μαθηματική της διάσταση, δεν είναι η λογική που δρα, αλλά μία αναλαμπή της διαίσθησης και της τάξης. Η πηγή της γνώσης, δεν είναι μόνο η λογική, αλλά και μία ξαφνική αναλαμπή της διαίσθησης γράφει ο M. Kline. και συνεχίζει, πως το μαθηματικό έργο είναι μία τέχνη, και πως αυτό το έργο ικανοποιεί ορισμένες αισθητικές απαιτήσεις, πως τελικά τα μαθηματικά είναι «μια περιπέτεια στον κόσμο του ορθού λόγου, και μία αισθητική εμπειρία» (Kline, οπ.π. σελ 356).

5. Δημιουργώντας ένα εκπαιδευτικό πλαίσιο μέσω της Τέχνης για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναλύσαμε την αμφίδρομη σχέση τέχνης και μαθηματικών και τεκμηριώσαμε τη θέση πως και τα δύο αποτελούν δραστηριότητες εγγενείς της ανθρώπινης φύσης. Σε αυτό το κεφάλαιο, θέτοντας τον ενθουσιασμό, τη δημιουργικότητα, τη φαντασία -που καλλιεργούνται μέσα από την καλλιτεχνική δημιουργία- στην υπηρεσία της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, θα διερευνήσουμε τα παιδαγωγικά οφέλη που μπορούν να προκύψουν για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και θα παρουσιάσουμε αντίστοιχες προσπάθειες που κινούνται σε αυτό το πλαίσιο.

Όσον αφορά την τέχνη, επικεντρωθήκαμε στην εικόνα και ειδικότερα στη ζωγραφική και όχι για παράδειγμα στη μουσική. Έχουμε ήδη μιλήσει για τη δύναμη της εικόνας πάνω στον άνθρωπο από καταβολής του. Σήμερα, η επαφή μας με την εικόνα είναι πλέον καθημερινή. Η εποχή μας χαρακτηρίζεται ως εποχή της εικόνας. Από τον φωτογραφικό φακό, τον κινηματογράφο, ως την καθολική πλέον χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή, η δύναμη της εικόνας την εδραιώνει ως βασικό χαρακτηριστικό του σημερινού πολιτισμού. Δεν είναι τυχαίο που ο φιλόσοφος Hans Jonas ήδη από το 1961 μίλησε για τον homo Pictor, προσπαθώντας να τονίσει το ανθρώπινο ένστικτο της αισθητικής. Το συγκινησιακό σοκ που προκαλεί, η αμεσότητα της μετάδοσης του μηνύματος που μεταφέρει, καθώς και το γεγονός πως απευθύνεται στο παγκόσμιο κοινό, την καθιστούν ισχυρό εργαλείο αντίληψης, σκέψης και επικοινωνίας. Τα σημερινά παιδιά, οι «ιθαγενείς της τεχνολογίας», μπορούν να χαρακτηριστούν και ως «ιθαγενείς της εικόνας», και είναι αυτό το στοιχείο που προσπαθεί η εκπαιδευτική τεχνολογία να αξιοποιήσει με σκοπό την αποτελεσματικότερη μάθηση. Με την εισαγωγή των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην εκπαίδευση, το παραδοσιακό σχολείο συγχρονίζεται με τη σημερινή εποχή και την καθημερινότητα των παιδιών που ζουν μέσα σε αυτό.

Από την άλλη, οι σύγχρονες διδακτικές μέθοδοι υποδεικνύουν την αναγκαιότητα της βιωματικότητας στη διδασκαλία, την αναγκαιότητα της δράσης, της εκπαιδευτικής δραστηριότητας, διά μέσω της οποίας το παιδί κάνει κτήμα του τη νεοαποκτηθείσα γνώση, όντας πολλές φορές το ίδιο ο ερευνητής και ο εφευρέτης. Το μαθηματικό περιεχόμενο αποκτά σημασία μέσα στο πλαίσιο της επαν-ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης από τον μαθητευόμενο (Α.Π.Σ. 2011). Τα καινούρια βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου, ακολουθώντας τις νέες τάσεις, εισάγουν το 2007 προτάσεις για δραστηριότητες είτε εν είδει εισήγησης στην αρχή των κεφαλαίων, είτε στο τέλος των κεφαλαίων εν είδει εφαρμογής ή και επέκτασης της νέας γνώσης. Δυστυχώς οι εκπαιδευτικοί, παρά τις επιμορφώσεις, στην πλειοψηφία τους επιμένουν στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας. Διάφορες απόψεις ακούγονται και γράφονται για το τι φταίει. Άλλοι λένε πως ο χρόνος μέσα στη σχολική αίθουσα είναι πολύ περιορισμένος σε σχέση με την προβλεπόμενη ύλη, ώστε να μην μένουν περιθώρια εμβάθυνσης ή πειραματισμού. Όσον αφορά τις επιμορφώσεις, έχει λεχθεί πως οι εκπαιδευτικοί επιμορφώθηκαν μεν ως προς το περιεχόμενο των δραστηριοτήτων, δεν επιμορφώθηκαν όμως και ως προς το πνεύμα τους. Ειδικότερα, έρευνες έχουν δείξει πως από μόνη της μια δραστηριότητα, ή το πλαίσιο μέσα από το οποίο αυτή αναδύεται δεν είναι ικανά να οδηγήσουν σε ουσιαστική μάθηση. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού και η διαχείριση, από τη μεριά του της πορείας της δραστηριότητας, καθώς και η συνεχής αναπροσαρμογή του πλαισίου της στην ευθυγράμμιση με τα εκάστοτε δεδομένα της τάξης αποτελεί εξίσου κρίσιμο σημείο (Γκαράνη, 2010).

Το ινστιτούτο Freudenthal επισημαίνει πως στη μαθηματική εκπαίδευση το σημείο εστίασης θα πρέπει να είναι η δραστηριότητα ως διαδικασία της μαθηματικοποίησης μεν, υπογραμμίζει δε τον κίνδυνο παρερμηνείας του πλαισίου της δραστηριότητας. Όταν ο ίδιος ο Freudenthal προτείνει να παρουσιάσουμε στα παιδιά μια δραστηριότητα που να έχει την αίσθηση της πραγματικότητας, έτσι που να έχει νόημα για αυτά, γεννιούνται τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά και γίνονται επίσης γνωστά ως «Μαθηματικά του πραγματικού κόσμου» (Realistic Mathematics Education). Ωστόσο ο λόγος για τον οποίο η Ολλανδική αναμόρφωση ονομάστηκε Ρεαλιστική, δεν είχε να κάνει τόσο με τον πραγματικό κόσμο, όσο με τη βαρύτητα που έδινε στην παρουσίαση προβλημάτων και δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν οι μαθητές να φανταστούν, να κάνουν «πραγματικά» μέσα στο μυαλό τους (http://www.fi.uu.nl/en/rme/). Ως εκ τούτου ο φανταστικός κόσμος των κόμικς, για παράδειγμα, ακόμα και η σύνθεση ενός ψηφιακού γραφιστικού έργου, μπορεί να αποτελέσουν αποτελεσματικό πλαίσιο προβλημάτων και δραστηριοτήτων. Επιπρόσθετα, η επιλογή του πραγματικού κόσμου ως μοναδικό πλαίσιο δραστηριοτήτων και προβλημάτων, θα πρέπει να μας απασχολήσει διπλά, αν σκεφτούμε πόσο διαφορετικές μεταξύ τους «πραγματικότητες» βιώνουν οι μαθητές μας από τη μία άκρη της Ελλάδας ως την άλλη. Το πρόβλημα της δεξαμενής πετρελαίου (Α' Γυμνασίου, §2.1), μπορεί να ανήκει στη σφαίρα της πραγματικότητας για κάποια παιδιά, όχι όμως και για πολλά από αυτά. Επιπλέον αυτού του είδους τα προβλήματα

και οι δραστηριότητες στερούνται κάτι άλλο βασικό, το κίνητρο, όπως το διατύπωσε ο Leont'ev, θέτοντάς το στο επίκεντρο της βασικής ιδέας της δραστηριότητας, η οποία θα πρέπει να εκτελείται από τον μαθητή με κάποιο επιθυμητό στόχο (αναφορά από Γκαράνη, οπ.π.). Από τη μία ο πραγματικός κόσμος ως πλαίσιο δραστηριοτήτων δεν μας εγγυάται ότι θέτει έναν επιθυμητό στόχο. Από την άλλη ο ρόλος του εκπαιδευτικού που όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι επιφορτισμένος με το να συσχετίζει το πλαίσιο της δραστηριότητας με τα διαφορετικά δεδομένα της εκάστοτε τάξης, είναι πολύ δύσκολο να έρθει ρεαλιστικά εις πέρας αν αναλογιστούμε το εύρος των διαφορετικών περιπτώσεων που έχει να αντιμετωπίσει από σχολείο σε σχολείο, από τάξη σε τάξη, ακόμα και μέσα στην ίδια τάξη, από μαθητή σε μαθητή.

Ποιο είναι λοιπόν αυτό το πλαίσιο μαθηματικών δραστηριοτήτων και προβλημάτων, το οποίο εξίσου καλά θα έχει νόημα για όσο το δυνατόν περισσότερους μαθητές και θα μπορεί να λειτουργήσει μέσα σε ένα ρεαλιστικό εύρος τροποποιήσεων, είτε σε μεγάλα αστικά κέντρα, είτε σε μικρές επαρχίες, είτε σε γενικά λύκεια, είτε σε επαγγελματικά, είτε σε αδύναμους μαθητές είτε σε δυνατούς, είτε σε μαθητές με πλούσιο κοινωνικό υπόβαθρο, είτε σε μαθητές με φτωχότερο; Προφανώς δεν υπάρχει ούτε μαγική, ούτε μοναδική απάντηση σε αυτή την ερώτηση. Υπάρχουν όμως καλές προσεγγίσεις-πρακτικές και η έκφραση μέσω της καλλιτεχνικής δημιουργίας στην οποία θα χρησιμοποιούνται μαθηματικές δεξιότητες, πιστεύουμε πως είναι μία από αυτές.

Έχουμε ήδη αναφέρει πως η ψηφιακή τέχνη χρησιμοποιεί πλέον διανυσματικά γραφικά. Σε ένα εργαστήριο λοιπόν ηλεκτρονικών υπολογιστών εφοδιασμένο με αντίστοιχα λογισμικά και κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, ενώ οι μαθητές ασχολούνται με τα στοιχειώδη εργαλεία της ψηφιακής τέχνης – γραμμή, σχήμα, χρώμα, φόρμα - ταυτόχρονα «παίζουν» με συναρτήσεις, γεωμετρία, μεταβλητές και γραφικές παραστάσεις, εμβαθύνοντας με έναν ενστικτώδη και εύληπτο τρόπο στην ύλη των μαθηματικών του προγράμματος σπουδών τους. Η δύναμη της εικόνας σε συνδυασμό με την ένταση της καλλιτεχνικής έκφρασης ενισχύουν τη βιωματικότητα της μάθησης, με δραστηριότητες ενταγμένες σε ένα πλαίσιο το οποίο μπορεί να ακολουθήσει ο καθένας.

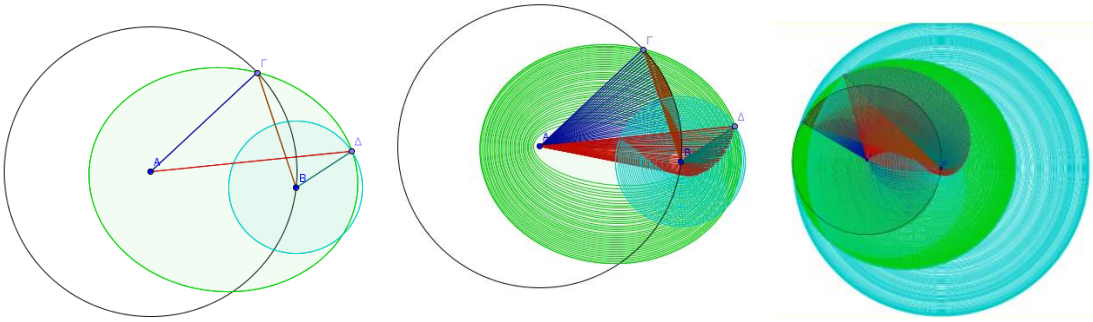
Δεν είναι λίγοι αυτοί που έχουν ήδη διακρίνει τη θετική συσχέτιση καλλιτεχνικής δημιουργίας, έκφρασης και παιχνιδιού με τα μαθηματικά σε ένα εργαστηριακό περιβάλλον. Στο Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου, ήδη από το 2008, η καθηγήτρια μαθηματικών Ειρήνη Περυσινάκη αρχίζει να διακρίνει τη διάθεση των μαθητών της να αφιερώσουν παραπάνω χρόνο στα μαθηματικά και να δημιουργήσουν. Μαζί λοιπόν με τον τότε διευθυντή του σχολείου, αξιοποιεί το έμψυχο υλικό της και τον χώρο της βιβλιοθήκης όπου οργανώνει κάποια εργαστηριακά μαθήματα. Τα εργαστηριακά μαθήματα συνεχίζονται και τα επόμενα χρόνια σε ειδικά διαμορφωμένη

αίθουσα (το εργαστήριο μαθηματικών) με μαθητές της Α και Β λυκείου –ολόκληρα τμήματα και όχι επιλογή μαθητών- σε ώρες μαθημάτων ή και μερικές φορές μετά τη λήξη τους. Οι μαθητές ανταποκρίνονται πολύ καλά και τελικά 6 χρόνια μετά, το εργαστήριο –στο οποίο συμμετέχουν και οι τέσσερις μαθηματικοί του σχολείου- έχει να επιδείξει σημαντικό έργο. Είναι μέλος του ευρωπαϊκού δικτύου για την καινοτομία στην εκπαίδευση «STENCIL: Science Teaching European Network for Creativity and Innovation in Learning», έχει διακριθεί σε ευρωπαϊκό επίπεδο με βραβείο καινοτομίας για το έργο του και έχει θέσει τους εξής στόχους:

- Την κατανόηση των Μαθηματικών μέσω της μοντελοποίησης, του πειραματισμού, της κατασκευής.
- Τη διαμόρφωση από τους μαθητές θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά και την γνώση, μέσω της επικοινωνίας και της ελεύθερης έκφρασης.
- Τη σύνδεση της Μαθηματικής επιστήμης με τις άλλες επιστήμες και την τέχνη
- Τη διάχυση εμπειριών και καλών πρακτικών που αφορούν την διδασκαλία των Μαθηματικών.
- Τη σύναψη σχέσεων με το Πανεπιστήμιο και άλλους εκπαιδευτικούς φορείς εντός και εκτός Ελλάδας.

(STENCIL http://www.stencil-science.eu/initiatives_view.php?id=1143)

Η Ειρήνη Περυσινάκη σε προσωπική συνέντευξη μέσω Skype μας εξηγεί περίπου πως λειτουργεί το Μαθηματικό Εργαστήρι του Πρότυπου Πειραματικού Λυκείου του Ηρακλείου (Μ.Ε.Π.Π.Λ.Η). Εξοπλισμένο με 2-3 υπολογιστές, απλά χειραπτικά μέσα όπως χάρακες, διαβήτες, κόλλες Α4, μαρκαδόρους, και μία βιβλιοθήκη, που η ίδια επιθυμεί με τον καιρό να γίνει αρτιότερη- ανοίγει για τους μαθητές τις ώρες μαθημάτων ή και μετά τη λήξη τους, κάθε φορά που ο εκπαιδευτικός κρίνει ότι θέλει να συμπληρώσει τη διδασκαλία του με κάποια δραστηριότητα. Στην αρχή αυτό δεν ήταν πολύ συχνό, καθώς μία δραστηριότητα απαιτούσε πολύ προετοιμασία. Πρέπει να πούμε πως οι δραστηριότητες του εργαστηρίου δεν είναι αμιγώς καλλιτεχνικές, αλλά υπάρχουν τελικά πολλές δραστηριότητες που μπορεί να χαρακτηριστούν ως τέτοιες. Για παράδειγμα, οι μαθητές εφαρμόζουν τις αλγεβρικές και γεωμετρικές γνώσεις που αποκτούν στην τάξη με το λογισμικό Geogebra δίνοντας συχνά αποτελέσματα καλλιτεχνικής αξίας. Επιπλέον, κατασκευάζουν στερεά με χαρτοδιπλωτική, καδράκια ή ψηφιδωτά με συμμετρίες, μακέτες για παιχνίδια πιθανοτήτων και πολλά άλλα. Παρακάτω παρουσιάζουμε κάποια στιγμιότυπα των δραστηριοτήτων των μαθητών. (βλ. Εικόνες 19, 20)



Εικόνα 19, Δυναμική κατασκευή με το Geogebra στο μαθηματικό εργαστήριο. Το κέντρο Α του κύκλου και ένα σημείο Β της περιφέρειάς του παραμένουν σταθερά, ενώ ταυτόχρονα είναι και εστίες μιας οικογένειας ελλείψεων που τέμνουν τον κύκλο στο σημείο Γ, το οποίο φαίνεται ότι τον διαγράφει. Το σημείο Δ προκύπτει ως διαφορά της εστιακής απόστασης από το άθροισμα των αποστάσεων των Α, Β από το Γ. Καθώς το σημείο Γ διατρέχει την οικογένεια των ελλείψεων, το σημείο Δ διαγράφει μια σπείρα. Ατομική δημιουργία μαθητή της Α' Λυκείου. Πηγή Μ.Ε.Π.Π.Λ.Η. http://mathlab.mysch.gr/

Εικόνα20,
Μακέτα για το επιτραπέζιο παιχνίδι "Ο τυχαίος περίπατος του κυρ Μέντιου", που ουσιαστικά περιγράφει τον τυχαίο περίπατο του φωτονίου. Ένα κέρμα ρίχνεται κάθε φορά και ανάλογα με την ένδειξή του ο γαϊδαράκος ο κυρ Μέντιος πηγαίνει ένα βήμα μπροστά ή ένα βήμα πίσω. Στόχος του είναι να φτάσει το κουκουνάρι, το οποίο δεν είναι τελικά καθόλου απλή υπόθεση. Ο δειγματικός χώρος με τη βοήθεια δενδροδιαγράμματος και διάφορα ερωτήματα εύρεσης πιθανοτήτων μπορούν να τεθούν με αφορμή αυτό το παιχνίδι, έως και πιο δύσκολα θέματα, όπως την εύρεση του μέσου χρόνου που θέλει ο κυρ Μέντιος μέχρι να φτάσει στο κουκουνάρι. Τάξη Α' Λυκείου. Πηγή Μ.Ε.Π.Π.Λ.Η. http://mathlab.mysch.gr/

Η Περυσινάκη μας εξηγεί πως συνηθίζει να ετοιμάζει φύλλα εργασίας παράλληλα με τις δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές να συνειδητοποιούν και να εντοπίζουν τα μαθηματικά πίσω από αυτές. Φροντίζει όμως παράλληλα για να υπάρχει μια πιο χαλαρή ατμόσφαιρα από ότι στην τάξη, χωρίς να παραγκωνίζεται και το παιχνίδι που θεωρεί απαραίτητο εργαλείο της διαδικασίας της μάθησης στα πλαίσια του εργαστηρίου. Τα θετικά του μαθηματικού εργαστηρίου είναι πολλά, τα παιδιά:

- Μαθαίνουν πώς να μαθαίνουν,
- Καλλιεργούν τη φαντασία,
- Λειτουργούν μέσα σε ομάδες, αναπτύσσοντας τη συνεργασία και τις επικοινωνιακές τους δεξιότητες.
- Αποκτούν πολλαπλές αναπαραστάσεις για τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται, τη λειτουργία τους και τον τρόπο που αλληλεπιδρούν.
- Έχουν καλύτερη εποπτεία για αυτό που διαπραγματεύονται μέσα στα πλαίσια του παραδοσιακού μαθήματος, ώστε να μπορούν πιο εύκολα να συνθέσουν μια απόδειξη ή να επιχειρηματολογήσουν πάνω σε μία έννοια.
- Καλλιεργούν μια πιο θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά

Όσον αφορά τα εργαστηριακά μαθηματικά γενικότερα, η κα Περυσινάκη μας εξηγεί πως η οργανωμένη γνώση, οι προτάσεις, οι αποδείξεις, η αξιωματική θεμελίωση, αποτελούν το τελευταίο στάδιο. Πολύ πριν από αυτό είναι να αποκτήσουν τα παιδιά για όλα αυτά μια γνώση εμπειρική, έτσι ώστε να γεννούνται ερωτήματα, εικασίες. Αυτή είναι η **πορεία του ερευνητή**. Αναζητά σχέσεις, λειτουργίες, δυνατότητες, θέτει ερωτήματα, ουσιαστικά-βαθιά ερωτήματα και τέλος έρχεται η απόδειξη και η αυστηρή αξιωματική θεμελίωση. Και αυτή η πορεία λείπει από την εκπαιδευτική πράξη.

Η πρακτική της πορείας του ερευνητή –δηλαδή ο μαθητής, από αρχικές υποθέσεις, να μεταβαίνει σε ειδικές παρατηρήσεις και έπειτα σε ευρύτερες γενικεύσεις- έτσι όπως αυτή διεξάγεται στο Μ.Ε.Π.Π.Λ.Η., πιστεύουμε πως συμβάλλει τα μέγιστα στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και η εποπτεία που αποκτούν οι μαθητές πάνω στις μαθηματικές έννοιες και ιδέες είναι αναγκαία προϋπόθεση για μια καλή επίδοση στα μαθηματικά. Ο M.Kline γράφει ότι «Το να ξέρεις τι να αποδείξεις είναι αναπόσπαστα δεμένο με το να ξέρεις πώς να το αποδείξεις». Η πρακτική αυτή επίσης είναι σύμφωνη με τη θεωρία του Piaget για το στάδιο των τυπικών-αφαιρετικών συλλογισμών, στο οποίο βρίσκονται οι έφηβοι. Οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ιδιαίτερα του λυκείου, είναι ικανοί για υποθετικο-παραγωγικούς συλλογισμούς και μάλιστα η ανάπτυξη αυτής της δεξιότητας είναι στόχος της εκπαίδευσης και ειδικότερα των μαθημάτων των θετικών επιστημών, όπως τα μαθηματικά. Επιπλέον στις αναθεωρήσεις που έκανε ο Piaget στα τελευταία στάδια της ζωής του, εισήγαγε έναν άλλον παράγοντα που παίζει ρόλο στην ενδυνάμωση των χαρακτηριστικών του τυπικού-αφαιρετικού σταδίου μέσα από την επεξεργασία προβλημάτων. Το κίνητρο για την επίτευξη του στόχου, για την επίλυση του προβλήματος. Όσο πιο ζωτικής σημασίας είναι το πρόβλημα που καλείται το άτομο να επιλύσει, τόσο μεγαλύτερες πιθανότητες υπάρχουν να αναπτύξει στρατηγικές εξέτασης υποθέσεων και εξαγωγής συμπερασμάτων (Leont'ev, αναφορά από Γκαράνη, οπ.π. & Piaget αναφορά από Shaffer R. 2004) Πόσο εύκολο είναι όμως να σχεδιαστεί κεντρικά μια μαθηματικού περιεχομένου εκπαιδευτική δραστηριότητα που να περιέχει τα παραπάνω χαρακτηριστικά και ταυτόχρονα να αποτελεί πεδίο ζωηρού ενδιαφέροντος για όσο το δυνατόν περισσότερους μαθητές; Δεδομένης της προηγούμενης ανάλυσης για το ζωτικό ρόλο που παίζει η εικόνα, η αισθητική και η τέχνη γενικότερα, πιστεύουμε πως η έκφραση μέσω της καλλιτεχνικής δραστηριότητας, στα πλαίσια ενός μαθηματικού εργαστηρίου, θα δημιουργήσει ένα δυναμικό περιβάλλον ενεργοποίησης του ενδιαφέροντος των μαθητών μας.

Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο στη φιλοσοφία του παραπάνω εργαστηρίου, είναι η βαρύτητα που δίνεται στο παιχνίδι. Η Περυσινάκη επισημαίνει πως είναι βασικό να διατηρείται μια χαλαρή ατμόσφαιρα στο εργαστήριο και όχι ένα αυστηρό λογικο-μαθηματικό πλαίσιο μάθησης και θεωρεί το παιχνίδι βασικό χαρακτηριστικό του εργαστηρίου, το οποίο συμβάλει στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ο Piaget ανέδειξε τη σημασία του παιχνιδιού, ως μέσο εξάσκησης των γνωστικών, συναισθηματικών,

κοινωνικών και νοητικών ικανοτήτων του παιδιού, σε όλους τους πολιτισμούς (Shaffer R. οπ.π.). Παρ' όλο που ο στόχος του παιχνιδιού όσον αφορά τα κίνητρα του παιδιού είναι η διασκέδαση, παρά αυτή καθεαυτή η ανάπτυξη δεξιοτήτων, το χαρακτήρισε ως «τη δουλειά του παιδιού».Ο Piaget ασχολήθηκε με τη σημασία του παιχνιδιού στη βρεφική, προσχολική και πρώιμη σχολική παιδική ηλικία, καθώς θεώρησε πως η επίδοση του παιδιού σε τέτοιες δραστηριότητες, φθίνει όσο αυτό μεγαλώνει, ενώ κατά την εφηβική και ενήλικη ζωή αντικαθίσταται από διαφόρων τύπων κοινωνικές δραστηριότητες όπως τα χόμπι. Όμως ο διακεκριμένος ιστορικός Johan Huizinga, στο βιβλίο του «Homo Ludens» (Παίζων Άνθρωπος), εξετάζει το παιχνίδι ως «σημαίνουσα μορφή», ως κοινωνική και πολιτισμική λειτουργία. Μέσα από ένα πλήθος εθνολογικών, φιλολογικών και ιστορικών αναλύσεων, συμπεραίνει πως όχι μόνο οι ενήλικες και οι έφηβοι δεν σταματούν να επιδίδονται στο παιχνίδι – με τις διάφορες εκφάνσεις του- ως ειδική μορφή δραστηριότητας, αλλά η έμφυτη στον άνθρωπο αυτή τάση, ήταν μία αναγκαία συνθήκη, όχι ικανή, για την πολιτισμική του εξέλιξη, από την φιλοσοφία και το δίκαιο, ως την ποίηση και την τέχνη (Huizinga, 2010). Ο μαθηματικός και συγγραφέας M.Kline χαρακτηρίζει τη μαθηματική δραστηριότητα ως «πνευματικό παιχνίδι». Θεωρούμε λοιπόν πρόσφορο και ζωτικής σημασίας έδαφος την ευχέρεια του εφήβου να πειραματιστεί και να παίξει με τις μαθηματικές του γνώσεις και τις οπτικές τους, αισθητικές-καλλιτεχνικές αναπαραστάσεις, σε ένα χαλαρότερο περιβάλλον μάθησης, από ότι αυτό που επικρατεί στη σχολική αίθουσα, όχι σε αντικατάσταση, αλλά σε ενίσχυση της αδιαμφισβήτητης μεθοδικής-συστηματικής εργασίας που πρέπει να φέρει εις πέρας, προς την κατάκτηση των απαιτούμενων μαθηματικών του γνώσεων.

Το 1995 στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο της Μασαχουσέτης (M.I.T.), ο τότε σπουδαστής του μεταπτυχιακού προγράμματος, μετέπειτα διδάκτωρ και σχεδιαστής γνωστής σειράς επιστημονικών παιχνιδιών εκπαιδευτικού χαρακτήρα David Williamson Shaffer, διεξήγαγε μια έρευνα σε σχέση με την αξία ενός μαθηματικού-καλλιτεχνικού εργαστηρίου ως εκπαιδευτικό πλαίσιο. Μελέτησε επίσης τις παιδαγωγικές επιπτώσεις και το ρόλο του υπολογιστή σε ένα τέτοιο περιβάλλον.

Η έρευνα έδειξε ότι στα πλαίσια του εργαστηρίου οι μαθητές ενδυνάμωσαν την οργάνωση του χώρου, του χρόνου και των μαθησιακών δραστηριοτήτων τους και κατέκτησαν μια ισορροπία μεταξύ του ελέγχου και της ελευθερίας κινήσεων που είχαν. Ενώ είχαν την ευχέρεια να κατευθύνουν τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος και να αποφασίσουν μόνοι τους τι αποτελούσε μια επιθυμητή λύση, αυτό δεν οδήγησε σε μία αποδιοργάνωση της διαδικασίας και της υλοποίησης του αρχικού σχεδιασμού. Οι ενήλικες συντονιστές, αλλά και οι υπόλοιποι μαθητές, σε συνδυασμό με τη διαδικασία παρουσίασης των έργων και της δημόσιας κριτικής τους, δημιούργησαν ένα μηχανισμό διά μέσω του οποίου οι μαθητές μπορούσαν να αξιολογήσουν και να ρυθμίσουν κατάλληλα τη δουλειά τους (Shaffer W. 1997). Η ευχέρεια των μαθητών να αποφασίζουν οι ίδιοι σε ένα μαθηματικό-καλλιτεχνικό εργαστήριο προσιδιάζει στη φύση των προβλημάτων που καλείται να επιλύσει ο άνθρωπος στην καθημερινή του ζωή. Η επίλυση προβλημάτων κρίνεται ως ιδιαίτερα σημαντική ικανότητα για το

σύγχρονο πολίτη, η οποία καλλιεργείται μέσα από τη μάθηση των μαθηματικών και αποτελεί βασικό στόχο τους. Στην πραγματική ζωή όμως τα προβλήματα χαρακτηρίζονται από έλλειψη δεδομένων ή περίσσεια στοιχείων και ασάφειες (Α.Π.Σ. οπ.π.). Θα προσθέταμε πως στην πραγματική ζωή δεν υπάρχει μοναδική λύση ούτε η πορεία επίλυσης είναι πάντα μονόδρομος, όπως συμβαίνει συνήθως με τα σχολικά μαθηματικά. Η επίλυση ενός προβλήματος στην καθημερινή ζωή εμπεριέχει το συστατικό της **απόφασης,** η οποία λαμβάνεται βάση των προσωπικών αξιών και επιδιώξεων του ατόμου. Θα λέγαμε δηλαδή πως η **απόφαση** λειτουργεί εν είδει αξιώματος σε ένα μαθηματικό σύστημα. Το άτομο έπειτα θα πρέπει μέσα από την μαθηματικοποίηση να έχει την «ικανότητα επικοινωνίας του συλλογισμού επίλυσης» (Α.Π.Σ. οπ.π.) καθώς και την επίγνωση της λειτουργίας των αποφάσεών του ως αξιώματα. Επομένως η ικανότητα λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων, έτσι όπως στοχοθετούνται από το Α.Π.Σ, πιστεύουμε πως ενδυναμώνονται σημαντικά μέσα σε ένα μαθηματικό-καλλιτεχνικό εργαστήριο.

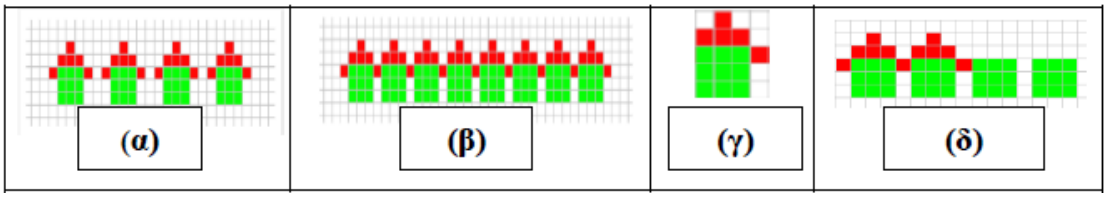
Άλλη σημαντική κοινωνική δεξιότητα που μπορούν να αναπτύξουν οι μαθητές σε ένα τέτοιο περιβάλλον είναι η διαχείριση του σωστού και του λάθους. Από τις συνεντεύξεις των μαθητών της παραπάνω έρευνας, μετά την ολοκλήρωση του εργαστηρίου, παρατηρήθηκε μια πιο θετική στάση, όσον αφορά τη λειτουργία του σωστού και του λάθους. Παρά τις διαβεβαιώσεις των καθηγητών μέσα στη σχολική αίθουσα, οι μαθητές μοιράζονται την αίσθηση πως το λάθος στην εκπαιδευτική διαδικασία τους απομονώνει και εξ' αιτίας τους επιβραδύνονται οι ρυθμοί της τάξης. Αντίθετα στο εργαστήριο τα λάθη έμοιαζαν περισσότερο με ευκαιρίες παρά με υπαιτιότητα. Ένιωσαν πως μπορούσαν να μάθουν από τα λάθη τους, πως αυτά ήταν συχνά η αιτία για να βρουν μια διαφορετική, μια καλύτερη προσέγγιση, μπορούσαν να αλλάξουν τα σχέδιά τους, να κάνουν ένα πράγμα με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, ή άλλα τελείως διαφορετικά πράγματα και παρόλα αυτά να μάθουν από τη διαδικασία. Σε αυτό το κομμάτι, σημαντικό ρόλο έπαιξε και η χρήση των υπολογιστών, καθώς οι μαθητές μπορούσαν εύκολα και άμεσα να δοκιμάσουν μια ιδέα, ακόμα και χωρίς να είναι σίγουροι, γιατί μπορούσαν να το διορθώσουν γρήγορα, χωρίς να χρειαστεί να σβήνουν στο χαρτί ή να ξεκινήσουν από την αρχή.

Όσον αφορά το ρόλο των υπολογιστών, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, δεν αποτέλεσε ούτε αναγκαία, ούτε ικανή συνθήκη για τη μάθηση, καθώς κάποιοι που χρησιμοποίησαν λιγότερο τον υπολογιστή δεν τα πήγαν απαραίτητα χειρότερα από αυτούς που τον χρησιμοποίησαν περισσότερο. Κρίθηκε όμως ως σημαντικό, διαδραστικό εργαλείο, καθώς η δυνατότητα των οπτικών αναπαραστάσεων που προσέδιδε, αύξησε τη δυναμική ποιότητα του εργαστηρίου και ενίσχυσε τη διαίσθηση των μαθητών. Η χρήση της εντολής της αναίρεσης, ενίσχυσε τη διάθεσή τους για πρωτοβουλίες και συνέβαλε στη συνεχή μετάφραση των αναπαραστάσεων, δίνοντάς τους την ευκαιρία της συνεχούς εξερεύνησης των μαθηματικών και καλλιτεχνικών σχέσεων. Έτσι, η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή συνέβαλε στη δημιουργία ενός εκπαιδευτικού περιβάλλοντος «συγκατάβασης» και «συγχώρεσης», μέσα στο οποίο οι μαθητές πειραματίζονταν ελεύθερα (Shaffer W. 1997).

Τέλος, ένα ακόμη δεδομένο που προέκυψε από την έρευνα ήταν ότι οι μαθητές εξοικειώθηκαν με την οπτικοποιημένη σκέψη μέσα από τις καλλιτεχνικές

δραστηριότητες και τις οπτικές αναπαραστάσεις και άρχισαν να χρησιμοποιούν στρατηγικές οπτικοποίησης στην επίλυση προβλημάτων με το πέρας του εργαστηρίου. Η οπτικοποίηση (visualization), είναι ένα από τα τρία στοιχεία που συνθέτουν την αντίληψη του χώρου (Κλιάπης, 2011) και συνίσταται στην ικανότητα του ατόμου να «βλέπει» κάτι με το μυαλό του, να δημιουργεί μια νοητή εικόνα για καταστάσεις, σχέσεις ή αντικείμενα στο χώρο. Η οπτικοποίηση ή οπτικοποιημένη σκέψη (Visual Thinking) συμβάλλει στην ανάπτυξη της χωρικής νοημοσύνης (Κλιάπης, οπ.π.) έτσι όπως ορίστηκε από τον Gardner, ο οποίος όμως την ξεχώρισε από τη λογικομαθηματική νοημοσύνη. Σύγχρονες έρευνες ωστόσο δείχνουν πως λογική-μαθηματική και χωρική νοημοσύνη σχετίζονται άμεσα (Shaffer R. 2004) και πως το παιδί μέσα από την αντιμετώπιση χωρικών καταστάσεων έρχεται πιο κοντά στην επιστημονική γνώση (Κλιάπης, οπ.π.). Η ανάπτυξη της χωρικής νοημοσύνης συνδέεται ως επί το πλείστον με τη διδασκαλία της γεωμετρίας (Α.Π.Σ. οπ.π.). Πιστεύουμε πως η οπτική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών εν γένει, μπορεί να καλλιεργήσει μια διαισθητική αντίληψη σε όλο το φάσμα της μαθηματικής αντίληψης. Η μετάβαση από την αλγεβρική στη γεωμετρική ερμηνεία εμπίπτει στην έννοια της οπτικοποίησης, όμως δεν είναι απαραίτητο να περιορίζεται σε αυτό το πλαίσιο. Θετικά αποτελέσματα παρατηρούνται όταν οι μαθητές ενθαρρύνονται να δημιουργήσουν εικονικές αναπαραστάσεις και για αλγεβρικές ιδέες, έννοιες και σχέσεις, έτσι ώστε να έχουν κάποιο νόημα για αυτούς.

Οι Ψυχάρης και Ζούπα σε μία μικρής έκτασης έρευνα, εξέτασαν τη συσχέτιση των εννοιών των σταθερών και των μεταβλητών σε απλές εξισώσεις με εικονικές αναπαραστάσεις, προκειμένου να διερευνήσουν τη νοηματοδότηση της μαθηματικής γενίκευσης μέσω μοτίβων. Για την έρευνά τους χρησιμοποίησαν το λογισμικό eXpresser, το οποίο επιτρέπει στους μαθητές να δημιουργούν σχέδια με αναπαραγωγή απλών μοτίβων δίνοντας τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται. Διαφορετικός αριθμός επαναλήψεων για κάθε ένα από τα διαφορετικά δομικά μοτίβα, καθώς και κάποια σταθερά σχήματα που εμφανίζονταν, δημιουργούσαν ένα ουσιαστικά αλγεβρικό περιβάλλον σκέψης για τους μαθητές με σχεδιαστικές ικανότητες που τελικά περιγράφονταν από εξισώσεις έως και 2^{ου} βαθμού (βλ. Εικόνα 24). Οι μαθητές καλούνταν μέσα από τον πειραματισμό με εικονικές μεταβλητές, να κάνουν εικασίες και έπειτα να περάσουν στην αλγεβρική γενίκευση των παρατηρήσεών τους.



Εικόνα 23, Οι μαθητές βλέπουνε το σχέδιο (α) και προσπαθούν να κατασκευάσουν το σχέδιο (β). Κρατάνε σταθερό το κόκκινο αριστερό τετράγωνο και θέτουν ως δομική μονάδα το σχέδιο (γ). Έπειτα δημιουργούνε και τις 8 κόκκινες σκεπές. Όταν όμως πατάνε το PLAY το τελικό σχήμα αλλοιώνεται καθώς οι σκεπές και τα σπίτια που παίρνουν τυχαίες μεταβλητές δεν συν-μεταβάλλονται.

Κατά τη διάρκεια της έρευνας, οι μαθητές φάνηκε πως άρχισαν να κάνουν σωστή διάκριση μεταξύ σταθερών και μεταβλητών σε μία εξίσωση, έδειξαν να κατανοούν καλύτερα τη συν-μεταβολή μεγεθών με αποτέλεσμα να τα εκφράζουν με κοινή

μεταβλητή και ενδυνάμωσαν την ικανότητά τους να εμπλέκονται με αφαιρετικές διαδικασίες αναφορικά με τη νοηματοδότηση της γενίκευσης (Ψυχάρης – Ζούπα, 2013)

Το παράδειγμα αυτής της έρευνας καταδεικνύει πως η οπτικοποίηση αλγεβρικών σχέσεων και αντικειμένων αποτέλεσε σημαντικό εργαλείο στην εννοιολογική κατανόησή τους. Επιπρόσθετα παρατηρούμε πως συνέβαλλε στην ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύουν ένα γράμμα ως μεταβλητή στην αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών ενός προβλήματος και στην επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων – βασικές δυσκολίες των μαθητών στην ενότητα των αλγεβρικών παραστάσεων (Α.Π.Σ. οπ.π.).

Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, το περιβάλλον ενός μαθηματικού εργαστηρίου που θα περιλαμβάνει κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες μαθηματικοποιημένης καλλιτεχνικής δημιουργίας, υποστηριζόμενο από ψηφιακά σχεδιαστικά μέσα, εκπαιδευτικό μαθηματικό λογισμικό και απλά χειραπτικά μέσα πιστεύουμε πως θα συμβάλλει αποτελεσματικά στην ουσιαστική μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών με ποικίλους τρόπους.

- Στο περιβάλλον του μαθηματικού εργαστηρίου είναι πιο εύκολο να δημιουργηθούν *διαδικασίες πειραματισμού, εικασιών διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων* από ότι στην κλασσική σχολική τάξη, έτσι όπως τα παραπάνω στοχοθετούνται από το Α.Π.Σ. Επιπλέον η μαθηματικοποίηση της καλλιτεχνικής δραστηριότητας μπορεί να συντελέσει σε ένα περιβάλλον ζωηρού ενδιαφέροντος με δραστηριότητες που θα παρέχουν ζωτικής σημασίας κίνητρα στους μαθητές. Ενισχύεται έτσι και η διαδικασία της επαν-ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης καθώς ο μαθητής ακολουθεί την *πορεία του ερευνητή*.
- Οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν με τρόπο δημιουργικό τις γνώσεις της αντίστοιχης βαθμίδας στην οποία βρίσκονται, να εξασκήσουν με τρόπο ευχάριστο πολλές από τις δεξιότητες που περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και να εμβαθύνουν στις μαθηματικές έννοιες και την μεταξύ τους αλληλεπίδραση.
- Ενισχύονται οι στρατηγικές οπτικοποιημένης σκέψης, σημαντικός παράγοντας για τη γεωμετρική-χωρική ικανότητα. Επιπλέον φαίνεται πως η οπτικοποίηση μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα και στους τομείς της άλγεβρας και της ανάλυσης, γεγονός που αξίζει να διερευνηθεί περαιτέρω.
- Η χρήση των ψηφιακών μέσων (ηλεκτρονικών υπολογιστών) ενισχύει τις παραπάνω διαδικασίες λόγω της ταχύτητας και της αμεσότητας στην εκτέλεση εντολών και των δυνατοτήτων της εικονικής αναπαράστασης μαθηματικών εννοιών και σχέσεων. Επιπλέον προσφέρει νέες δυνατότητες μέτρησης μεγεθών συμπληρώνοντας την ελλιπή διδακτική τους κατά τα παλαιότερα προγράμματα σπουδών (Α.Π.Σ. οπ.π.), συμβάλλοντας στα μετρικά προβλήματα των μαθητών και τις υστερήσεις των ενηλίκων σε καταστάσεις που απαιτούν συγκρίσεις ή μετρήσεις μεγεθών.
- Ενισχύεται η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων του αυριανού σύγχρονου πολίτη με τη βοήθεια μοντελοποίησης, καθώς ο σημερινός μαθητής εξοικειώνεται με τη διαδικασία λήψης αποφάσεων και την εποικοδομητική διαχείριση του σωστού και του λάθους.
- Ενισχύεται η συνεργατικότητα μεταξύ ατόμων και ομάδων, η ανταλλαγή απόψεων, η «ικανότητα για επικοινωνία στα μαθηματικά και για τα

μαθηματικά» (Α.Π.Σ. οπ.π.) και η δημιουργία ενός πλαισίου αυτορρύθμισης και αυτοαξιολόγησης της δουλειάς και των παραγόμενων έργων μέσα από την αλληλεπίδραση της ομάδας των συνομηλίκων.

- Παρέχεται η ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν την ευρύτητα της εφαρμογής των μαθηματικών ακόμη και στα πιο απροσδόκητα πεδία, να πεισθούν για το σημαντικό τους ρόλο στον πολιτισμό και την κοινωνία και να καλλιεργήσουν μια πιο θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.

Εκτός όμως από όλα τα παραπάνω, υπάρχουν και παράλληλες, σημαντικές δεξιότητες και στάσεις που αποκτούν τα παιδιά. Μέσα σε ένα εργαστήριο καλλιτεχνικής έκφρασης και δημιουργίας, οι μαθητές:

- Αναπτύσσουν την κριτική τους ικανότητα, ιδίως όσον αφορά ποιοτικές σχέσεις. Στα περισσότερα μαθήματα, υπάρχουν οι σωστές και λάθος απαντήσεις, ενώ στην καλλιτεχνική έκφραση η προσωπική κρίση έχει μεγαλύτερη βαρύτητα από το σωστό και το λάθος.
- Γνωρίζουν πως κάποια προβλήματα μπορεί να έχουν παραπάνω από μία λύσεις, και πως κάποια ερωτήματα μπορεί να έχουν παραπάνω από μία απαντήσεις.
- Κατανοούν πως σε πολύπλοκα προβλήματα οι προϋποθέσεις και η μεθοδολογία επίλυσης ενδέχεται να χρειαστεί να τροποποιηθεί ανάλογα με τα δεδομένα και τις καταστάσεις. Η καλλιτεχνική έκφραση άλλωστε εξασκεί την ικανότητα και τη θέληση να δουλέψουμε με το απρόβλεπτο όταν αυτό προκύπτει.

Ένα ερώτημα που γεννάται κατά την παραπάνω ερευνητική διαδικασία είναι: μπορούμε από τα μαθηματικά να παράγουμε τέχνη, έτσι ώστε να υποστηριχθεί μια τέτοια δομή; Την απάντηση δίνει η έρευνα των Αρβανίτη και Τουμάση, οι οποίοι με τη βοήθεια του Geometer’s Sketchpad παρουσίασαν ιδέες για τη δημιουργία διαφόρων τύπων ψηφιδωτών. Σύμφωνα με την έρευνά τους το εκπαιδευτικό δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό, με κύριους εκπροσώπους το Sketchpad και το Cabri, προσφέρει τη δυνατότητα δημιουργίας καλλιτεχνικών μαθηματικών, κυρίως χάρη στις επιλογές των γεωμετρικών μετασχηματισμών που διαθέτουν. Ξεκινώντας λοιπόν από δομικά σχήματα έδειξαν πως είναι δυνατό να δημιουργηθούν εντυπωσιακά καλλιτεχνήματα κάνοντας χρήση των εργαλείων της μεταφοράς, της περιστροφής και της ανάκλασης. Στην εργασία τους επίσης σημείωσαν το αυξημένο ενδιαφέρον την τελευταία δεκαετία για περαιτέρω ανάπτυξη των αποκαλούμενων "μαθηματικώς" δημιουργούμενων εικόνων και σχημάτων, δηλαδή αυτών που παράγονται από Η/Υ με την εφαρμογή μαθηματικών τύπων ή αλγορίθμων (Τουμάσης & Αρβανίτης, 2002).
Προσθέτοντας στα λογισμικά που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω και τις δυνατότητες των Geogebra, eXpresser και Inkscape σημειώνουμε πως ο συγκερασμός τέχνης και επιστήμης στην εκπαιδευτική διαδικασία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Το θέμα έχουν προσεγγίσει εκπαιδευτικοί από την Ελλάδα και το εξωτερικό, δημοσιεύοντας αντίστοιχες δραστηριότητες στις κατά τόπους ιστοσελίδες τους, αλλά και θεωρητικοί

της εκπαίδευσης, σε βαθμό μεγαλύτερο από αυτόν που η παρούσα εργασία είχε τη δυνατότητα να καλύψει. Ο συντονισμός όλων αυτών των προσπαθειών, η επεξεργασία τους προς έναν κεντρικό σχεδιασμό κατάλληλων μαθηματικών-καλλιτεχνικών δραστηριοτήτων ή ακόμα και ο προγραμματισμός νέου εκπαιδευτικού λογισμικού, πιστεύουμε πως αποτελεί πρόσφορο έδαφος για μελλοντικές έρευνες.

Βιβλιογραφικές Αναφορές:

Γκαράνη, Π. (2010). Η μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη. Μεταπτυχιακή Εργασία, Αθήνα Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Clawson, C.C. (2005). Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών – Η εξερεύνηση της εντυπωσιακής ιστορίας των αριθμών. Αθήνα: Κέδρος

Davis, P.J – Hersh, R. (1981). Η Μαθηματική Εμπειρία. Αθήνα: Τροχαλία

Gombrich, E.H. (1995). Το χρονικό της Τέχνης. *χ.τ.* Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.

Huizinga, J. (2010). Homo Ludens. Αθήνα: Γνώση.

Κλιάπης, Π. (2011). Η δημιουργία Τεχνολογικά Εμπλουτισμένου Μαθησιακού Περιβάλλοντος με υπέρβαση του σχολικού χώρου και εφαρμογή σε νέα διδακτική προσέγγιση των Μαθηματικών. Διδακτορική διατριβή, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη.

Kline, M. (2002). Τα μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό. Αθήνα: Κώδικας.

Κουτρουφιώτης, Δ. (2006). Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία. Αθήνα: Leader Book.

Ξαγοράρης, Π. (1996). Δομές και μεσότητες στην Τέχνη. Θεσσαλονίκη: Παρατηρητής.

Panofski, E. (1996). Perspective as Symbolic Form. New York: Zone Books. Ανακτήθηκε 27 Απριλίου 2014 από τη διεύθυνση http://tems.umn.edu/pdf/Erwin%20Panofsky%20-%20Perspective%20as%20Symbolic%20Form.pdf

Παπανικολάου, Απ. (2005). Το σύνορο μεταξύ Τέχνης και μαθηματικών. Ανακτήθηκε 4 Μαΐου 2014 από τη διέυθυνση http://blogs.sch.gr/apapanik/

Shaffer, D.R. (2004). Εξελικτική Ψυχολογία: Παιδική Ηλικία και Εφηβεία. Αθήνα: Έλλην

Shaffer, D.W. (1997). Learning Mathematics Through Design: The Anatomy of Escher's World. Journal of mathematical Behavior 16 (2), 95-112. Ανακτήθηκε 19 Μαρτίου 2014 από τη διεύθυνση http://edgaps.org/gaps/wp-content/uploads/ShafferLearning_Mathematics.pdf

Struik, D.J. (2008). Συνοπτική Ιστορία των μαθηματικών. Αθήνα: Δαίδαλος.

Τουμάσης, Μ. & Αρβανίτης, Τ. (2002). Μαθηματικά και Τέχνη: Διακοσμητικά σχήματα με χρήση γεωμετρικού λογισμικού. *Πρακτικά 19ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Κομοτηνή, 8-10 Νοεμβρίου 2002.* Ανακτήθηκε 9 Απριλίου 2014 από τη διεύθυνση *http://www.hms.gr/apothema/?s=scf&i=19*

Φίλη, Χ. (2000). Γεωμετρία και τέχνη – δύο παράλληλες αναζητήσεις. *Πρακτικά 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα, 10-12 Νοεμβρίου 2000.* Ανακτήθηκε 9 Απριλίου 2014 από τη διεύθυνση *http://www.hms.gr/apothema/?s=scf&i=17*

Ψυχάρης Γ. & Ζούπα Α., Διαδικασίες νοηματοδότησης της Μαθηματικής γενίκευσης μέσω μοτίβων, *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, Φλώρινα 14-16 Μαρτίου 2013*