Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου
1ο 2ωρο Τεστ σε Μιγαδικούς και Συναρτήσεις
Δευτέρα, 22 Οκτωβρίου 2012

Θέμα Α^o

Α1. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί να δείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. **(Μονάδες 8)**

Α2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το A, B αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ; **(Μονάδες 7)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ). **(Μονάδες 2x5)**

(α) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

(β) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1| + |z_2|$.

(γ) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

(δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνήσια μονότονες.

(ε) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

Θέμα Β^o

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Β1. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 9)**

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. **(Μονάδες 8)**

Β2. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. **(Μονάδες 8)**

Θέμα Γ^o

Δίνονται τρεις μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_3| = 5$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, οι οποίοι έχουν εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $16z_1^2 + 9z_2^2 = 0$. **(Μονάδες 8)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. **(Μονάδες 9)**

Γ3. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $z_1,\ z_2, z_3$. **(Μονάδες 8)**

Θέμα Δ^o

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(f(x)) = 2g(x) - x$.

Δ1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**

Δ2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $H(x) = f(x) - g(x)$ στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**

Δ3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = x_0$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται μόνο σ' ένα σημείο. **(Μονάδες 5)**

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x+x_0-2))+x+x_0 = 2f(x+x_0-2)+2$. **(Μονάδες 5)**

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\ln x + x_0 + 1)) + \ln x + 1 < x_0$. **(Μονάδες 5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ