

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ηρακλείου
Τεστ στους Μιγαδικούς
Παρασκευή, 21 Σεπτεμβρίου 2012

Θέμα 1^ο

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει πάντοτε λύση και να προσδιορίσετε τις λύσεις.

Θέμα 2^ο

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (i) Για οποιονδήποτε μιγαδικό z ισχύει $z - \bar{z} = 2Imz$.
- (ii) Εάν οι z και $w \neq 0$ είναι φανταστικοί αριθμοί τότε ο μιγαδικός $\frac{z}{w}$ είναι πραγματικός.
- (iii) Για οποιονδήποτε μιγαδικό z με $z^\nu \in \mathbb{R}$, όπου ν θετικός ακέραιος, ισχύει $z \in \mathbb{R}$.
- (iv) Για οποιονδήποτε μιγαδικό z με $z^\nu = z^\mu$ όπου ν, μ θετικοί ακέραιοι ισχύει $\nu = \mu$.
- (v) Για οποιονδήποτε μιγαδικούς z, w με $z^2 + w^2 = 0$ ισχύει $z = w = 0$.
- (vi) Είναι $i^{2\kappa(\kappa+1)+3} = -i$ για οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό κ .
- (vii) Αν για τους μιγαδικούς z_1 και $z_2 \neq 0$ ισχύει $z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{I}$ τότε $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{I}$.
- (viii) Ο αριθμός $z = (1 + i)^{10} + (1 - i)^{10}$ είναι φανταστικός.
- (ix) Το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό μέρος του z , είναι μία ευθεία με εξίσωση $y = x$.
- (x) Οι εικόνες των συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
- (xi) Οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $Re(z_1 z_2) = Re(z_1)Re(z_2)$ είναι πραγματικοί.
- (xii) Αν οι μιγαδικοί $z_1, z_2, \dots, z_{2013}$ είναι τέτοιοι ώστε $z_1, z_2 \neq 0, \frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{z_1} (z_1 + z_2 + \dots + z_{2013}) \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \frac{1}{z_2} (z_1 + z_2 + \dots + z_{2013}) \in \mathbb{R}$$

τότε $z_1 + z_2 + \dots + z_{2013} \neq 0$.